Práctico 2

1. Encontrar el dominio de las funciones definidas por las siguientes fórmulas:

(a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

(b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

(d) $f(x) = (\sqrt{x})^2$.

(e) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1, \\ \sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq 1. \end{cases}$

2. Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

3. Sea $f(x) = 1/(1+x)$. Interpretar lo siguiente:

(a) $f(f(x))$. ¿Para cuáles x tiene sentido?

(b) $f(1/x)$.

(c) $f(cx)$ para un número real $c \neq 0$.

4. Sean $C(x) = x^2$, $H(x) = \dfrac{1}{x}$ y $S(x) = \operatorname{sen}(x)$.

(a) Determinar:

(i) $(C \circ H)(y)$.

(ii) $(C \circ H \circ S)(t) + (S \circ H)(t)$.

(b) Expresar cada una de las siguientes funciones en términos de C, H y S usando operaciones aritméticas de funciones y composición.

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x^2)}$.

(ii) $f(t) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))$.

(iii) $f(u) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{1}{u}\right)$.

5. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *par* si para todo x, $f(-x) = f(x)$; e *impar* si para todo x, $f(-x) = -f(x)$. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, donde f, g y h son funciones definidas en todo $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = x^2$ es par.

(b) $f(x) = x^3$ es impar.

(c) Si f no es par, entonces es impar.

(d) Si f y g son pares, entonces $f + g$ es par.

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & 0 \leq x < 1, \\ -x+3 & 1 \leq x < 4, \\ \frac{1}{2}x - 3 & 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Graficar la función g, donde:

(a) $g(x) = f(x)$.

(b) $g(x) = f(x) - 1$.

(c) $g(x) = f(x+2)$.

(d) $g(x) = 2f(x)$.

(e) $g(x) = -f(x)$.

(f) $g(x) = f(2x)$.

(g) $g(x) = f(\frac{1}{2}x)$.

(h) $g(x) = f(-x)$.

(i) $g(x) = |f(x)|$.

7. Esbozar la gráfica de las siguientes funciones, dar el dominio, y analizar si son inyectivas y/o suryectivas, donde tanto el conjunto de salida como el de llegada es $\mathbb{R}$.

(a) $a(t) = 5t - 2$.
(b) $b(x) = 3x^2 + 2x - 1$.
(c) $c(t) = -t^2 + 1$.
(d) $d(t) = |t - 3|$.
(e) $X(t) = \frac{t}{|t|}$.
(f) $V(x) = |\operatorname{sen}(x)|$.
(g) $W(t) = \operatorname{sen}^2(t)$.
(h) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

8. Para cada una de las siguientes funciones, escoger un intervalo cerrado $[a, b]$ de tal manera que la función restringida a tal intervalo sea inyectiva. Dar en cada caso la función inversa restringida a la imagen.

(a) $f(x) = -x^2$.
(b) $f(x) = 1/x^2$.

9. Hallar f^{-1} para cada una de las siguientes funciones, e indicar su dominio.

(a) $f(x) = x^3 + 1$.
(b) $f(x) = (x-1)^3$.
(c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
(e) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x-2} & \text{si } x \neq 2, \\ 0 & \text{si } x = 2. \end{cases}$
(f) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 1 - x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

10. Sean $X, Z \subseteq \mathbb{R}$. Probar que si $f : X \to Z$ es estrictamente decreciente, entonces es 1-1.

11. Probar que $H : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}^{>0}$ dada por $H(x) := \frac{1}{x}$ estrictamente decreciente.

12. Probar que $f(x) := x^3$ es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$.

Ejercicios Extra

13. Un rectángulo tiene 20 m de perímetro. Expresar el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

14. Dar el área de la superficie de un cubo como función de su volumen.

15. (a) Para cada conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ definimos la función C_A como sigue:

$$C_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Si A y B son dos subconjuntos arbitrarios de los números reales, encontrar expresiones para $C_{A\cap B}$, $C_{A\cup B}$ y $C_{\mathbb{R}\setminus A}$, en términos de C_A y C_B.

(b) Probar que si f es una función tal que $f(x)$ vale 0 ó 1 para todo x, entonces existe un conjunto A tal que $f = C_A$.

(c) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f^2$ si y sólo si $f = C_A$ para algún conjunto A.

16. (a) Sea $f(x) = x + 1$. ¿Existe una función g tal que $f \circ g = g \circ f$?

(b) Sea f una función constante. ¿Para qué funciones g se cumple $f \circ g = g \circ f$?

(c) Supongamos que f es una función tal que $f \circ g = g \circ f$ para toda función g. Demostrar que f es la función identidad.

17. Decidir si son verdaderos o falsos.

(a) Si f y g son impares, entonces $f \circ g$ es par.

(b) Si f y g son impares, entonces $f \cdot g$ es par.

(c) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

(d) $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g$.

18. Decidir para cuáles $n \in \mathbb{N}$ la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := x^n$ es estrictamente creciente.