Práctico 5

1. Sean f y g funciones tales que f es continua en (a,b), g es continua en (b,c), y tales que los límites $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x)$ y $\lim\limits_{x \searrow b} g(x)$ existen y son iguales a l.

Probar entonces que función $h : (a,c) \to \mathbb{R}$ definida como sigue es continua en (a,c):

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & a < x < b, \\ l & x = b, \\ g(x) & b < x < c. \end{cases}$$

2. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & x < 0, \\ x \operatorname{sen}(x) & x \geq 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x} & x < 0, \\ 5 & x = 0, \\ \dfrac{\sqrt{1+10x}-1}{x} & x > 0. \end{cases}$

(d) $f(x) = \lfloor 1/x \rfloor$.

(e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1, \\ 6 & x = -1. \end{cases}$

(f) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$.

3. Suponga que f está definida en un entorno de 0.

(a) Probar que si $|f(x)| \leq |x|$, entonces f es continua en 0.

(b) Probar que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, g es continua en 0 y $g(0) = 0$, entonces f es continua en 0.

4. Determinar para cuáles de las siguientes funciones f existe una función continua F, definida en toda la recta real, que extienda a f.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$.

(b) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

(c) $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$.

5. (a) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que si $f|_{\mathbb{Q}} \equiv 0$, entonces $f \equiv 0$.

(b) Probar que si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas y coinciden en $\mathbb{Q}$, entonces son iguales.

6. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en (a,b).

(a) Mostrar que si $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = f(b)$, entonces existe una extensión de f que es continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Mostrar que la conclusión del punto anterior no se sigue en general si se omite alguna de las dos condiciones.

7. Para cada una de las siguientes funciones decir si están acotadas superior o inferiormente y si alcanzan sus valores máximos o mínimos.

(a) $f(x) = x^2$ en $(-1,1)$.

(b) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = x^4$ en $(-1,2]$.

(d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en $[0,a]$, para algún $a > 0$.

(e) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en $\big[k\pi, (k+1)\pi\big]$, con $k \in \mathbb{Z}$.

(f) $f(x) = 2 + \operatorname{sen}(x)$ en $\big(k\pi, (k+1)\pi\big)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

8. Sea $p(x) = x^5 + x + 1$.

(a) Demostrar que $\lim_{x\nearrow\infty} p(x) = \infty$ y $\lim_{x\searrow-\infty} p(x) = -\infty$ (Sugerencia: comparar $p(x)$ con la función x^5).

(b) Probar que $p(x)$ es suryectiva.

(c) Hallar un número natural n tal que $p(x) = 0$ para algún $x \in [-n, n]$.

9. Sea f una función continua y supongamos que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué se puede decir de f?

10. (a) Probar que si f y g son dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, entonces existe un x_0 en (a, b) tal que $f(x_0) = g(x_0)$.

(b) Graficar las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $x+1$ en el mismo sistema de ejes coordenados. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = x + 1$, tiene al menos una solución.

(c) Demostrar que existe un $x \in [0, \pi/2]$ tal que $x^3 \operatorname{sen}^7(x) = 2$

(d) Demostrar que en el plano, un círculo de radio 1 y un cuadrado de lado $\sqrt{2}$ pueden intersecarse en una región cuya área sea exactamente 1,337.

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, y justificar.

(a) Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}$ entonces f alcanza un mínimo.

(b) Si $|f|$ es continua en a entonces entonces f es continua en a.

(c) Existe un número que es exactamente una unidad mayor que su cubo.

12. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Mostrar que si f es continua, entonces tiene un punto fijo, esto es, existe un a tal que $f(a) = a$. Interpretar gráficamente.

13. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 am y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las 7:00 pm. A la mañana siguiente baja de la cima a las 7:00 am, siguiendo el mismo camino, arriba al monasterio a las 7:00 pm. Con el Teorema de los Valores Intermedios, demuestre que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.

14. Sea f definida y continua en todo $\mathbb{R}$. Supongamos que f es siempre positiva y que $\lim_{x\nearrow\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\searrow-\infty} f(x)$. Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

15. (a) Definir una función que no sea continua en ningún punto, pero que $|f|$ sea continua en todo punto.

(b) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

(c) Definir una función que sea discontinua en $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

16. (a) ¿Cuántas funciones f continuas hay tales que $f(x)^2 = x^2$ para todo x en $\mathbb{R}$?

(b) ¿Cuál es la respuesta a la pregunta anterior si no exigimos continuidad?

(c) Si f y g son continuas con $g(x) \neq 0$ para todo x y si $f^2 = g^2$, probar que $f = g$ o $f = -g$.

(d) ¿Qué sucede si no suponemos g nunca nula en el inciso anterior?