Práctico 7

Funciones exponencial y logaritmo en base a. Dado $a > 1$, la función exponencial $E_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ dada por $E_a(x) := a^x$ es estrictamente creciente, tiene inversa estrictamente creciente $\log_a : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, y cumplen:

$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$
$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \qquad a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$
$$\lim_{x \searrow -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \nearrow \infty} a^x = \infty$$
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$
$$E_a'(x) = \frac{1}{\log_a e} \cdot a^x \qquad \log_a'(x) = (\log_a e) \cdot \frac{1}{x},$$

donde e es la constante $2{,}71828\ldots$. Al logaritmo en base e lo escribimos ln, de manera que

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Determinar los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) x^{-3}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} \frac{x}{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen} x}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x \nearrow \infty} \frac{2-x}{x^3-1}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x \searrow 0} x^x$.

2. Para cada una de las siguientes funciones, determinar si existen, máximos y mínimos, locales y globales ("absolutos"), en el conjunto A.

(a) $f(x) = x^3 + x, \quad A = [-1, 2]$.

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, $A = [-2, 2]$.

(c) $f(x) = 2 - |x+1|, \quad A = (-2, 1]$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}, \quad A = (-1, 1)$.

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}, \quad A = \mathbb{R}$.

(f) $f(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x), \quad A = \left[0, \frac{7\pi}{15}\right]$.

3. Sea $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ dada por $f(x) := x^x$.

(a) Determinar su derivada (Ayuda: expresarla usando la función exponencial de base e y ln).

(b) ¿Es (de)creciente? Si no, determinar dónde lo es.

(c) Demostrar que f tiene un mínimo global y hallarlo.

4. Determinar los pares de números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.

5. Demostrar que, para cualquier $m \in \mathbb{R}$, el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + m$ no posee dos raíces distintas en el intervalo $[0, 1]$.

6. Para cada uno de las siguientes funciones verificar el Teorema del Valor Medio, encontrando explícitamente el valor de c.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $[1, 2]$.

(b) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x+1}$ en $[2, 9]$.

7. Sea $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. Demostrar que no hay un valor c tal que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c).$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema del Valor Medio?

8. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, los intervalos de concavidad, y los puntos de inflexión de las siguientes funciones y graficar.

(a) $f(x) = x^{2/3}$.

(b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

(d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

(e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+5}}$.

(f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$.

9. Para cada inciso, trazar la gráfica de una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfaga todas las condiciones.

(a) $f'(-1) = 0$, f no es derivable en $x = 1$, y $f'(x) < 0$ para $|x| < 1$.

(b) $f'(x) > 0$ para $|x| > 1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f''(x) < 0$ si $x < 0$, y $f''(x) > 0$ si $x > 0$.

10. Graficar las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{3 + x^2}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 5}$.

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

(e) $f(x) = x^2(x-2)^2$.

11. Si $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ $(n > 1)$, probar que $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x - a_i)^2$ tiene valor mínimo y hallarlo.

12. Sea f una función n veces derivable en todo $\mathbb{R}$, tal que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{n+1}) = 0$ para $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$. Demostrar que existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f^{(n)}(y_0) = 0$.

13. Sean f y g dos veces derivables. Probar que si f es creciente y f y g son convexas, entonces $f \circ g$ es convexa.

Diremos que F es una *primitiva* (o *antiderivada*) de f en el intervalo I si $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

14. Demostrar que si F_1 y F_2 son primitivas de f en I, entonces $F_1 - F_2$ es constante.

15. Probar que si F es primitiva de f y $a \in \mathbb{R}$, entonces $G(x) := F(a \cdot x)$ es primitiva de $g(x) := a \cdot f(a \cdot x)$.

16. Dado $n \in \mathbb{N}$, hallar todas las funciones f tales que $f'(x) = x^n$.

17. Hallar una función f tal que $f'(x) = a \cdot f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. (Ayuda: hacer el caso $a = 1$ primero).

Ejercicios Extra

18. (a) Demostrar que entre todos los rectángulos que tienen determinado perímetro, el cuadrado tiene área máxima.

(b) Encontrar las dimensiones de un triángulo isósceles de área maximal que se pueda inscribir en un círculo de radio r.

19. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, valores máximos y/o mínimos, intervalos de concavidad, abscisas de puntos de inflexión de las siguientes funciones y graficar.

(a) $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x$.

(b) $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

(c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x$.

(d) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}$.

(e) $f(x) = x^4 - x^3$.

(f) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 9}$.

(g) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$.

(h) $f(x) = x + 3x^{\frac{2}{3}}$.

(i) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

20. ¿Para qué valores de c tiene $p(x) = x^4 + cx^3 + x^2$, dos puntos de inflexión, uno y ninguno? Ilustre graficando $p(x)$ con varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica cuando disminuye c?

21. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivables en todo punto del intervalo abierto I, y sea $a \in I$.

(a) Si $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in I$, y $f(a) = g(a)$, demostrar que $f(x) > g(x)$ para todo $x > a$ y que $f(x) < g(x)$ para todo $x < a$.

(b) Demostrar que no se cumple lo enunciado en (a) si no se supone $f(a) = g(a)$.

(c) Demostrar que $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$ cuando $x > 1$.

22. Dado $p(x)$ un polinomio se dice que a es *raíz de orden* n si $p(x) = (x-a)^n q(x)$ para $q(x)$ algún polinomio con $q(a) \neq 0$.

(a) Probar que a es raíz de orden 2 de $p(x)$ si y sólo si $p(a) = p'(a) = 0$ y $p''(a) \neq 0$.

(b) Enunciar una generalización del resultado en (a) para raíces de orden n arbitrario.

(c) ¿Cuándo $p(x) = ax^2 + bx + c$ tiene una raíz doble, para $a \neq 0$?

23. Demostrar que si $f(x) := a\cos x + b \operatorname{sen} x$, entonces $f''(x) + f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

24. Supongamos que f satisface $f''(x) + f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = a$ y $f'(0) = b$.

(a) Probar que función $h(x) := f(x) - (a\cos x + b \operatorname{sen} x)$ cumple con $h''(x) + h(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $h(0) = 0$ y $h'(0) = 0$.

(b) Probar que $\Phi(x) := h(x)^2 + h'(x)^2$ es constante e igual a 0 (Ayuda: derivar).

(c) Concluir que $h(x)$ es constante e igual a 0 y luego f debe tener la forma dada por el Ejercicio 23. (Ayuda: Φ es suma de dos cuadrados).