# Apunte de Introducción a la Lógica y la Computación
# Lógica Proposicional

Pedro Sánchez Terraf (CIEM-FAMAF)

9 de octubre de 2015

Este apunte está basado principalmente en el primer capítulo del libro *"Logic and Structure"* de Dirk van Dalen (tercera edición, Springer)[1], y se nutrió con las sugerencias y correcciones indicadas por H. "Flaco" Gramaglia, M. Pagano, D. Alonso, J. Venzon, P. Dal Lago y Luis M. Ferrer Fioritti, entre otros.

## 1. La Lógica Proposicional: lo básico

### 1.1. Introducción: Semántica versus Sintaxis

Recordemos el clásico ejemplo de la *"Isla de Caballeros y Pícaros"*. Allí las personas se dividían en dos categorías separadas: los que siempre decían la verdad —los Caballeros— y los que siempre mentían —los Pícaros. Un interesante ejercicio al respecto es el siguiente:

> Nos encontramos con Alberto, un habitante de la *Isla*. Nos dice: "Si soy caballero, me comeré el sombrero". ¿Qué es Alberto?

Si hacemos la siguiente asignación de variables:

| | |
|---|---|
| $x$ | "Soy caballero" = "Alberto es caballero". |
| $c$ | "Me comeré el sombrero" = "Alberto se comerá el sombrero". |

podremos determinar el "tipo" de Alberto mediante un simple cálculo:

$$
\begin{array}{ll}
& x \equiv x \Rightarrow c \\
\equiv & \{ \text{ Definición de } \Rightarrow \} \\
& x \equiv x \vee c \equiv c \\
\equiv & \{ \text{ Regla Dorada } \} \\
& x \wedge c
\end{array}
$$

Aplicando Debilitamiento se obtiene $x$ y luego probamos que Alberto es caballero. ¿Qué aprendemos de este ejemplo? Que hay dos niveles diferenciados: el de la sintaxis, lo simbólico, donde están las variables $x$, $c$ y las demostraciones; y por otro lado, el de las estructuras, *modelos* matemáticos estudiados, el significado que asignamos a cada símbolo utilizado. Podemos hacer una tablita:

[1] Agradezco a Pablo Villalba por los apuntes tomados durante el segundo semestre de 2003.

| **Mundo Simbólico** | | **Isla de Caballeros y Pícaros** |
|---|---|---|
| $x$ | $\longleftrightarrow$ | "Soy caballero" = "Alberto es caballero" = "Alberto" |
| $x \Rightarrow c$ | $\longleftrightarrow$ | "Si soy caballero me comeré el sombrero" |
| $\equiv$ | $\longleftrightarrow$ | "dice" = "es" = "es del mismo tipo que" |
| $x \equiv x \Rightarrow c$ | $\longleftrightarrow$ | "Alberto dijo: Si soy caballero me comeré el sombrero" = "Alberto es caballero si y solo si *'Si soy caballero me comeré el sombrero'* es verdad" |
| *false* | $\longleftrightarrow$ | "falso" = "pícaro" |
| *true* | $\longleftrightarrow$ | "verdadero" = "caballero" |

donde la correspondencia entre ambos niveles queda establecida mediante el siguiente "Axioma":

> Todo habitante de la Isla es *equivalente* a lo que dice.

Esta correspondencia entre nuestros símbolos y estructuras es la *semántica* de nuestro sistema formal.

Dividiremos el análisis de la sintaxis proposicional en dos partes, primero presentando su lenguaje y en segundo término dando un procedimiento para "derivar" proposiciones a partir de otras. Entre esas dos partes formalizaremos la semántica. Para finalizar, investigaremos las relaciones que surgen entre las nociones definidas por vía sintáctica y por vía semántica.

## 1.2. Lenguaje de la Lógica Proposicional

La lógica proposicional se escribirá con el siguiente alfabeto:

1. Símbolos proposicionales (en cantidad numerable): $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$;

2. Conectivos. Básicos: $\bot$, $\wedge$, $\rightarrow$. Derivados: $\neg$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\top$, $|$, $\ldots$;

3. Símbolos auxiliares: '(' y ')'.

Los símbolos proposicionales y $\bot$ son los "átomos" o "proposiciones atómicas", y los designaremos con el nombre $At$. El conectivo "$\neg$" es unario, "$\bot$" es "nulario" (corresponde a una *constante*) y el resto son binarios. Para designar un operador binario arbitrario, utilizaremos el símbolo "$\Box$".

**Definición 1.** El conjunto de las *proposiciones*, *PROP*, es el menor conjunto $X$ que cumple con las siguientes propiedades:

$\boxed{\varphi \in At}$ Para todo $\varphi \in At$, $\varphi \in X$.

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Para toda $\varphi$ en $X$, $(\neg\varphi)$ está en $X$.

$\boxed{(\varphi \Box \psi)}$ Para todas $\varphi, \psi$ en $X$, $(\varphi \Box \psi)$ está en $X$.

Usaremos letras griegas $\varphi$, $\psi$, $\chi$, $\ldots$ [2] para nombrar proposiciones. Así, la expresión $(\varphi \Box \psi)$ puede ser $(\varphi \wedge \psi)$, ó $(\varphi \rightarrow \psi)$, o bien $(\varphi \vee \psi)$, etcétera. Sería bueno notar que los símbolos que utilizamos que no están entre los enumerados más arriba, **no son**

[2] Las letras griegas "$\varphi$", "$\psi$" y "$\chi$" se llaman, respectivamente, "fi", "psi" y "ji".

proposiciones ni pueden formar parte de ellas. Digamos, el símbolo $\varphi$ se utilizó más arriba para *designar* una proposición, para ser el nombre, no la proposición misma. Claramente, la letra griega $\varphi$ no es ningún $p_i$, ni un conectivo ni un paréntesis. Es el nombre que le damos a una proposición, y cuando decimos $(\varphi \to \psi)$ nos estamos refiriendo a cualquiera de las fórmulas que tengan dicha *estructura*, por ejemplo $(p_0 \to p_1)$, $(p_3 \to (p_1 \wedge p_4))$, etcétera.

**Teorema 2** (inducción en subfórmulas)**.** *Sea $A$ un predicado sobre $PROP$. Luego $A(\varphi)$ es verdadero para toda $\varphi \in PROP$ si y sólo si:*

$\boxed{\varphi \in At}$ *Si $\varphi$ es atómica, $A(\varphi)$ vale.*

$\boxed{(\neg\varphi)}$ *Si $A(\varphi)$ entonces $A((\neg\varphi))$.*

$\boxed{(\varphi \,\square\, \psi)}$ *Si $A(\varphi)$ y $A(\psi)$ entonces $A((\varphi \,\square\, \psi))$.*

*Demostración.* Sea $X = \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$. $X$ satisface las tres propiedades de la Definición 1, así que $PROP \subseteq X$ (pues $PROP$ es el **menor** conjunto con tales propiedades). Como $X \subseteq PROP$, tenemos $X = PROP$ y entonces $A(\varphi)$ vale para toda $\varphi \in PROP$. $\square$

Veamos un ejemplo de prueba por inducción:

**Definición 3.** Una sucesión de proposiciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una *serie de formación* de $\varphi \in PROP$ si $\varphi_n = \varphi$ y para todo $i \leq n$, $\varphi_i$ es:

- atómica, o bien
- igual a $(\neg\varphi_j)$ con $j < i$, ó
- igual a $(\varphi_j \,\square\, \varphi_k)$ con $j, k < i$.

**Teorema 4.** *Toda $\varphi \in PROP$ tiene una serie de formación.*

*Demostración.* Analizamos cada caso:

$\boxed{\varphi \in At}$ "$\varphi$" es una serie de formación de $\varphi$ (tenemos $n = 1$, $\varphi_1 := \varphi$).

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Por hipótesis inductiva, $\varphi$ tiene una serie de formación; sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ una tal serie. Pero $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1} := (\neg\varphi)$ es una serie de formación de $(\neg\varphi)$: las primeras $n$ proposiciones cumplen con las propiedades, y $\varphi_{n+1}$ es igual a $(\neg\varphi_n)$; además $\varphi_{n+1} = (\neg\varphi)$ por construcción.

$\boxed{(\varphi \,\square\, \psi)}$ Por hipótesis inductiva, $\varphi$ y $\psi$ tienen sendas series de formación; llamémoslas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n (= \varphi)$ y $\psi_1, \ldots, \psi_m (= \psi)$. Luego $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m, (\varphi \,\square\, \psi)$ es serie de formación de $(\varphi \,\square\, \psi)$: contrastar con las definiciones.

Con esto se concluye la prueba. $\square$

Dado que las proposiciones tienen una construcción recursiva, uno puede definir objetos en términos de proposiciones de manera recursiva (también llamada inductiva). Veamos un ejemplo:

**Definición 5.** El *grado* de una proposición, $gr(\cdot)$, es la función definida de la siguiente manera.

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p_n$, $gr(\varphi) := n$; $gr(\bot) := -1$.

$\boxed{(\neg\varphi)}$ $gr((\neg\varphi)) := gr(\varphi)$.

$\boxed{(\varphi \mathbin{\square} \psi)}$ $gr((\varphi \mathbin{\square} \psi)) := \max\{gr(\varphi), gr(\psi)\}$.

Es decir, el grado de una proposición es el máximo subíndice de los símbolos proposicionales que ocurren en ella. ¿Cómo aplicamos tal definición? Calculemos $gr(((p_0 \wedge p_3) \to p_2))$:

$$gr\big(((p_0 \wedge p_3) \to p_2)\big) = \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), gr(p_2)\big\} \qquad \text{Por el caso ``}\square\text{''}$$

Ahora nos haría falta hacer lo mismo para cada término, es decir, *recursivamente:*

$$\begin{aligned}
&= \max\big\{gr\big((p_0 \wedge p_3)\big), 2\big\} && \text{Por el caso ``}At\text{''}\\
&= \max\big\{\max\big\{gr(p_0), gr(p_3)\big\}, 2\big\} && \text{Por el caso ``}\square\text{''}\\
&= \max\big\{\max\{0,3\}, 2\big\} && \text{Por el caso ``}At\text{''}\\
&= \max\{3,2\} && \text{Por definición de máx}\\
&= 3 && \text{Por definición de máx}
\end{aligned}$$

El siguiente teorema nos asegura que las definiciones recursivas sobre *PROP* funcionan bien.

**Teorema 6** (definición por recursión en subfórmulas)**.** *Sea $A$ un conjunto y supongamos dadas funciones $H_{At} : At \to A$, $H_\neg : A \to A$ y $H_\square : A^2 \to A$. Entonces hay exactamente una función $F : PROP \to A$ tal que*

$$\begin{cases} F(\varphi) &= H_{At}(\varphi) \quad \textit{para } \varphi \textit{ en } At \\ F((\neg\varphi)) &= H_\neg\big(F(\varphi)\big) \\ F((\varphi \mathbin{\square} \psi)) &= H_\square\big(F(\varphi), F(\psi)\big) \end{cases} \tag{1}$$

*Demostración.* Demostraremos solamente la unicidad del mapeo $F$. Esto (como se repetirá en muchísimas ocasiones más adelante) se hará por inducción en subfórmulas. Supongamos que $G$ también satisface con las propiedades (1). Luego,

$\boxed{\varphi \in At}$ Sabemos que $F(\varphi) = H_{At}(\varphi) = G(\varphi)$, por ser $\varphi$ atómica.

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Suponiendo que $F(\varphi) = G(\varphi)$, obtenemos $F((\neg\varphi)) = H_\neg(F(\varphi)) = H_\neg(G(\varphi)) = G((\neg\varphi))$.

$\boxed{(\varphi \mathbin{\square} \psi)}$ Supongamos $F(\varphi) = G(\varphi)$ y $F(\psi) = G(\psi)$. Luego

$$F((\varphi \mathbin{\square} \psi)) = H_\square(F(\varphi), F(\psi)) = H_\square(G(\varphi), G(\psi)) = G((\varphi \mathbin{\square} \psi)).$$

Con esto probamos cada paso requerido por el principio de inducción en subfórmulas (Teorema 2), así que podemos concluir que $F$ y $G$ coinciden en todo *PROP*. $\square$

*Ejemplo* 1. Para la función $gr : PROP \to \mathbb{Z}$ considerada más arriba, tenemos:

$$\begin{array}{lcl} H_{At}(\varphi) & = & \begin{cases} n & \text{si } \varphi = p_n \\ -1 & \text{si } \varphi = \bot \end{cases} \\ H_{\neg}(n) & = & n \\ H_{\square}(m,n) & = & \text{máx}\{m,n\} \end{array}$$

**Ejercicio 1.** Comprobar que las funciones del ejemplo 1 son las que corresponden.

*Nota* 1. La definición del conjunto *PROP* es recursiva, pero **no** por recursión en subfórmulas, sino mediante un teorema aún más general que no enunciaremos aquí; baste observar que si en tal definición hubiésemos usado el Teorema 6, habríamos incurrido en una *petitio principi.*[3]

## 1.3. Semántica

Hasta ahora, nuestras proposiciones son sólo cadenas de símbolos. A continuación les daremos una noción de "significado": cuándo son ciertas y cuándo falsas. Para ello, consideraremos que un "universo posible" donde se efectúan esas preguntas viene dado por una función, que a cada proposición le asigna 0 cuando es "falsa" y 1 cuando es "verdadera".

**Definición 7.** Una función $v : PROP \to \{0,1\}$ es una *valuación* si:

1. $v(\bot) = 0$.
2. $v((\neg\varphi)) = 1 - v(\varphi)$.
3. $v((\varphi \wedge \psi)) = \text{mín}\{v(\varphi), v(\psi)\}$.
4. $v((\varphi \vee \psi)) = \text{máx}\{v(\varphi), v(\psi)\}$.
5. $v((\varphi \to \psi)) = 0$ si y sólo si $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 0$.
6. $v((\varphi \leftrightarrow \psi)) = 1$ si y sólo si $v(\varphi) = v(\psi)$.

**Ejercicio 2.** Aunque la Definición 7 **no es** una definición por recursión como se establece el Teorema 6 (¿por qué?), se pueden identificar las funciones $H_{\neg}$ y $H_{\square}$ (para cada "$\square$"). Encontrarlas. ¿Qué pasa con $H_{At}$?

Si nuestros símbolos proposicionales codifican (para dar un ejemplo) ciertas afirmaciones sobre el mundo físico en un momento dado, digamos:

| | |
|---|---|
| $p_0$ | Llueve. |
| $p_1$ | Hace frío. |
| $p_2$ | Son las dos de la tarde |
| ... | ... |
| $p_{100}$ | Cayó un meteorito |
| ... | ..., |

cada valuación corresponderá a un posible momento en la historia.

[3]El problema del huevo y la gallina, para decirlo en criollo.

**Ejercicio 3.** Determinar para **este** preciso momento cuáles serían los valores de $v(p_i)$ para $i = 0, 1, 2$ e $i = 100$.

**Teorema 8** (de Extensión)**.** *Si $f : At \to \{0,1\}$ es tal que $f(\bot) = 0$, entonces existe una única valuación $[\![\cdot]\!]_f$ tal que $[\![\varphi]\!]_f = f(\varphi)$ para toda $\varphi \in At$.*

*Demostración.* Construiremos la valuación $[\![\cdot]\!]_f$ por recursión en subfórmulas.

$\boxed{\varphi \in At}$ Definimos $[\![\varphi]\!]_f := f(\varphi)$.

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Si ya está definida $[\![\varphi]\!]_f$, tomamos $[\![(\neg\varphi)]\!]_f := 1 - [\![\varphi]\!]_f$.

$\boxed{(\varphi \,\square\, \psi)}$ Analizamos caso por caso. Dados $[\![\varphi]\!]_f$ y $[\![\psi]\!]_f$, definimos

- $[\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f := \text{mín}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.
- $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 0$ si $[\![\varphi]\!]_f = 1$ y $[\![\psi]\!]_f = 0$, y $[\![(\varphi \to \psi)]\!]_f := 1$ en caso contrario.
- $[\![(\varphi \vee \psi)]\!]_f := \text{máx}\{[\![\varphi]\!]_f, [\![\psi]\!]_f\}$.
- $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_f := 1$ si $[\![\varphi]\!]_f = [\![\psi]\!]_f$, $[\![(\varphi \leftrightarrow \psi)]\!]_f := 0$ en caso contrario.

Se sigue inmediatamente de esta definición que $[\![\cdot]\!]_f$ cumple con todas las propiedades para ser una valuación; contrastar con el ejercicio 2. Más aún, para que una función $[\![\cdot]\!]_f$ cumpla con la hipótesis del teorema debe satisfacer el caso base ($\varphi \in At$) de la definición recursiva anterior, y para que sea una valuación está obligada a satisfacer las propiedades impuestas por los otros casos de la recursión. Es decir, una valuación tal siempre va a poder obtenerse por una construcción recursiva. Y como la construcción recursiva da una única respuesta (por el Teorema 6), se concluye que la extensión de $f$ a $PROP$ es única. $\square$

Como consecuencia inmediata de este teorema, obtenemos:

**Corolario 9.** *Si $v$ y $v'$ son valuaciones que coinciden en $At$ (es decir, $v(\varphi) = v'(\varphi)$ para toda $\varphi \in At$), entonces $v = v'$.*

*Demostración.* Se puede probar por inducción en subfórmulas; esta opción queda como ejercicio. Sino, podemos considerar el siguiente argumento: las restricciones de $v$ y $v'$ a $At$ (es decir, $v$ y $v'$ pensadas como funciones de $At$ en $\{0,1\}$) son iguales; llamémosle $w$ a esa restricción común. Las valuaciones $v$ y $v'$ son extensiones de $w$ a todo $PROP$ y el Teorema de Extensión obliga (por la unicidad) a que sean iguales. $\square$

Siguiendo la analogía de una valuación con un momento posible de la historia, nuestro próximo concepto caracteriza a las proposiciones que son válidas "siempre" (o en todo universo posible).

**Definición 10.** $\varphi$ es una *tautología* (escribimos "$\models \varphi$") si y sólo si $v(\varphi) = 1$ para toda $v$. Sea $\Gamma \subseteq PROP$; diremos que $\varphi$ es *consecuencia* de $\Gamma$ (escribimos "$\Gamma \models \varphi$") si y sólo si para toda $v$ tal que

Para toda $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$

se da

$v(\varphi) = 1$.

Se ve fácilmente que "$\models \varphi$" es lo mismo que "$\emptyset \models \varphi$". Si $\Gamma \subseteq PROP$ y $v$ es tal que para toda $\psi \in \Gamma$, $v(\psi) = 1$, diremos que $v$ *es una valuación* **de** $\Gamma$ y escribiremos $v(\Gamma) = 1$.

*Ejemplo* 2.

1. $\models (\varphi \to \varphi)$.

   Sea $v$ una valuación arbitraria. Como los únicos valores posibles de $v$ son 0 y 1, ver que da 1 es lo mismo que ver que no da 0.

   $$\begin{aligned} v((\varphi \to \varphi)) = 0 &\text{ sii } v(\varphi) = 0 \text{ y } v(\varphi) = 1 \\ &\text{ sii contradicción} \end{aligned}$$

   Como suponer $v((\varphi \to \varphi)) = 0$ es contradictorio, concluimos $v((\varphi \to \varphi)) = 1$.

2. $\models ((\neg(\neg\varphi)) \to \varphi)$ (ejercicio).

3. $\{\varphi, (\varphi \to \psi)\} \models \psi$. Sea $v$ una valuación tal que $v(\varphi) = v((\varphi \to \psi)) = 1$. Luego, sabemos que **no** es el caso que $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 0$ (por la segunda igualdad); es decir: o bien $v(\varphi) = 0$, ó $v(\psi) = 1$, ó ambos. Como $v(\varphi) = 1$, debe ser $v(\psi) = 1$, que era lo que debíamos probar.

4. $\not\models p_1$

   Sale negando la definición: $p_1$ **no** es una tautología sii existe alguna $v'$ tal que $v'(p_1) = 0$. Tomemos $f(\varphi) := 0$ para toda $\varphi \in At$. Luego, el Teorema de Extensión dice que existe $[\![\cdot]\!]_f$ que coincide con $f$ en $At$, en particular $[\![p_1]\!]_f = 0$. Tomo $v'(x) := [\![x]\!]_f$ y listo.

Para probar que una proposición $\varphi$ en particular es una tautología, no hace falta ver que para cada una de las infinitas[4] valuaciones posibles $v$ se da $v(\varphi) = 1$, sino que esto se puede saber revisando una cantidad finita de casos. Para ello, necesitaremos un resultado de índole práctica, que nos asegura una forma *finitista* de aplicar valuaciones varias a una proposición.

**Lema 11** (de Coincidencia)**.** *Si $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda $p_i$ que ocurran en $\varphi$, entonces $[\![\varphi]\!]_v = [\![\varphi]\!]_{v'}$.*

*Demostración.*

$\boxed{\varphi \in At}$ Como la única fórmula atómica que ocurre en $\varphi$ es $\varphi$, tenemos que $v(\varphi) = v'(\varphi)$, con lo que queda probado este caso (notar que $v(\bot) = v'(\bot) = 0$ siempre).

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Supongamos que $v$ y $v'$ coinciden en los átomos de $(\neg\varphi)$; pero los átomos de $(\neg\varphi)$ son los átomos de $\varphi$, y luego por hipótesis inductiva $v(\varphi) = v'(\varphi)$. Ahora bien,

$$v((\neg\varphi)) = 1 - v(\varphi) = 1 - v'(\varphi) = v'((\neg\varphi)).$$

$\boxed{(\varphi \,\square\, \psi)}$ Hay que analizar cada caso, similarmente al Teorema 8. Queda como ejercicio.

□

Otra forma de enunciar el Lema de Coincidencia es la siguiente: si dos valuaciones coinciden en los símbolos proposicionales que forman $\varphi$, entonces coinciden en $\varphi$. Es precisamente este lema el que da utilidad a las *tablas de verdad*. Veámoslo con un ejemplo.

[4] De hecho, hay tantas como números reales (!). Probar esto es un ejercicio interesante.

*Ejemplo* 3. Queremos ver que $\models p_0 \wedge p_2 \to p_2$. Deberíamos (por lo menos en principio) revisar todas las posibles valuaciones. Cada una de ellas se puede ver como una asignación de un 0 ó un 1 a cada símbolo proposicional:

| | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $\dots$ |

Luego, tomemos **todas** las valuaciones y nos fijemos a qué evalúa nuestra proposición:

| | $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\dots$ | $p_0 \wedge p_2$ | $p_0 \wedge p_2 \to p_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | $\dots$ | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | 1 | 0 | 1 | $\dots$ | 0 | 1 |
| $v_3$ | 1 | 0 | 1 | 0 | $\dots$ | 1 | 1 |
| $v_4$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $\dots$ | 0 | 1 |
| $v_5$ | 0 | 1 | 0 | 0 | $\dots$ | 0 | 1 |
| $\vdots$ | | | $\vdots$ | | $\ddots$ | | |

Hasta ahora, sólo nos dio 1, pero una prueba a ciegas no nos asegura nada. De todos modos, si entendimos la definición de valuación, nos daremos cuenta que en cada caso sólo necesitamos conocer el valor de $p_0$ y $p_2$ en la valuación; por ejemplo, como $v_1$ y $v_3$ coinciden en $p_0$ y $p_2$, también coinciden en $(p_0 \wedge p_2)$. En fin, nos podemos quedar con la parte de la tabla que contiene a $p_0$ y a $p_2$:

| | $p_0$ | $p_2$ | $(p_0 \wedge p_2)$ | $((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $v_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $v_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\vdots$ | | $\vdots$ | | |

y por último, eliminamos la parte repetida:

| | $p_0$ | $p_2$ | $(p_0 \wedge p_2)$ | $((p_0 \wedge p_2) \to p_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $v_4$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $v_5$ | 0 | 0 | 0 | 1 |

con lo cual nos queda una tabla de verdad como Dios[5] manda.

**Definición 12.** La *sustitución* del símbolo proposicional $p$ *por* la proposición $\psi$ *en* $\varphi$, "$\varphi[\psi/p]$" se define de la siguiente manera:

$\boxed{\varphi \in At}$ Si $\varphi = p$ entonces $\varphi[\psi/p] = \psi$. Caso contrario, $\varphi[\psi/p] = \varphi$

$\boxed{(\neg\varphi)}$ $(\neg\varphi)[\psi/p] = (\neg\varphi[\psi/p])$.

$\boxed{(\varphi \,\Box\, \chi)}$ $(\varphi \,\Box\, \chi)[\psi/p] = (\varphi[\psi/p] \,\Box\, \chi[\psi/p])$.

[5]Reemplace por la deidad que más le agrade.

Los próximos resultados mostrarán que la sustitución funciona bien con la relación de consecuencia.

**Lema 13.** *Para cada valuación* $[\![\cdot]\!]$, $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!] = 1$ *implica* $[\![\, \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p] \,]\!] = 1$.

*Demostración.* Fijemos una $[\![\cdot]\!]$; probaremos, por inducción en $\psi$, la afirmación equivalente:

$$[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!] \text{ implica } [\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!],$$

suponiendo, en cada paso de la prueba inductiva, válido el antecedente para probar el consecuente.

$\boxed{\psi \in At}$ Aplicamos directamente la definición: Si $\psi = p$, entonces $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\varphi_1]\!]$ y $[\![\psi[\varphi_2/p]]\!] = [\![\varphi_2]\!]$. Como los segundos miembros son iguales por hipótesis, son iguales también los primeros miembros. Si $\psi \neq p$, entonces $[\![\psi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\psi]\!] = [\![\psi[\varphi_2/p]]\!]$, con lo que queda probado este caso.

$\boxed{(\neg\varphi)}$ Supongamos $[\![\varphi_1]\!] = [\![\varphi_2]\!]$. Por hipótesis inductiva obtenemos $[\![\varphi[\varphi_1/p]]\!] = [\![\varphi[\varphi_2/p]]\!]$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
[\![(\neg\varphi)[\varphi_1/p]]\!] &= [\![(\neg\varphi[\varphi_1/p])]\!] && \text{por caso “}\neg\text{” de sustitución} \\
&= 1 - [\![\varphi[\varphi_1/p]]\!] && \text{por definición de valuación} \\
&= 1 - [\![\varphi[\varphi_2/p]]\!] && \text{por hipótesis inductiva} \\
&= [\![(\neg\varphi[\varphi_2/p])]\!] && \text{por definición de valuación} \\
&= [\![(\neg\varphi)[\varphi_2/p]]\!] && \text{por caso “}\neg\text{” de sustitución.}
\end{aligned}$$

$\boxed{(\varphi \,\square\, \chi)}$ Es muy similar al caso anterior:

$$\begin{aligned}
[\![(\varphi \,\square\, \chi)[\varphi_1/p]]\!] &= [\![(\varphi[\varphi_1/p] \,\square\, \chi[\varphi_1/p])]\!] && \text{por caso “}\square\text{” de sustitución} \\
&= H_\square([\![\varphi[\varphi_1/p]]\!], [\![\chi[\varphi_1/p]]\!]) && \text{por definición de valuación.}
\end{aligned}$$

Aquí “$H_\square$” son las del ejercicio 2.

$$\begin{aligned}
&= H_\square([\![\varphi[\varphi_2/p]]\!], [\![\chi[\varphi_2/p]]\!]) && \text{por hipótesis inductiva} \\
&= [\![(\varphi[\varphi_2/p] \,\square\, \chi[\varphi_2/p])]\!] && \text{por definición de valuación} \\
&= [\![(\varphi \,\square\, \chi)[\varphi_2/p]]\!] && \text{por caso “}\square\text{” de sustitución.}
\end{aligned}$$

Queda entonces probado $[\![(\varphi \,\square\, \chi)[\varphi_1/p]]\!] = [\![(\varphi \,\square\, \chi)[\varphi_2/p]]\!]$. □

**Teorema 14** (de Sustitución)**.** *Si* $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ *entonces* $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$.

*Demostración.* Supongamos que $\models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$. Luego, dada una $[\![\cdot]\!]$ arbitraria, tenemos $[\![\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2]\!] = 1$. Por el lema anterior, obtenemos $[\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!] = 1$. Como $[\![\cdot]\!]$ era arbitraria, sabemos que *para toda* $v$ se da $[\![\psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]]\!] = 1$, pero esto no es otra cosa que $\models \psi[\varphi_1/p] \leftrightarrow \psi[\varphi_2/p]$. □

## 1.4. Completitud Funcional

En vista de los resultados anteriores, se deduce que la semántica de un conectivo (i.e., cómo se comporta con respecto a una valuación) viene dada por su tabla de verdad. Ahora, una tabla de verdad no es otra cosa que una función de $n$ variables (para el caso de los conectivos binarios, $n = 2$; unarios, $n = 1$ y etcétera) que toma valores 0 ó 1 y devuelve un valor 0 ó 1. Retomando el ejemplo 3, la tabla de verdad de $(p_0 \wedge p_2)$ es

| | $p_0$ | $p_2$ | $p_0 \wedge p_2$ |
|---|---|---|---|
| $v_1$ | 1 | 1 | 1 |
| $v_2$ | 1 | 0 | 0 |
| $v_4$ | 0 | 1 | 0 |
| $v_5$ | 0 | 0 | 0 |

Es decir, es exactamente la función $H_\wedge$ que va de $\{0,1\}^2$ a $\{0,1\}$. En general, para cada función de $\{0,1\}^2$ a $\{0,1\}$ podemos definir un nuevo conectivo correspondiente. Si por ejemplo tomamos la función $H_|$ definida por esta tabla:

| $x$ | $y$ | $H_\|(x,y)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

obtenemos un nuevo conectivo binario, la “rayita” (en inglés, *stroke*) de Scheffer, “ $|$ ”. Si $v$ es una valuación, obtenemos $v((\varphi \,|\, \psi)) = H_|(v(\varphi), v(\psi))$, o en otros términos,

$$v((\varphi \,|\, \psi)) := 1 - \text{mín}\{v(\varphi), v(\psi)\}. \tag{2}$$

**Ejercicio 4.** Comprobar esto último.

Se pueden definir conectivos ternarios, cuaternarios,... En general, (la semántica de) un conectivo $n$-ario “#” vendrá dado por una función $H_\# : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ y tendremos

$$v(\#(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)) := H_\#(v(\varphi_1), \ldots, v(\varphi_n)).$$

Un ejemplo de conectivo ternario sería el siguiente:

| $p_0$ | $p_1$ | $p_2$ | $\#(p_0, p_1, p_2)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |

Volvamos por un momento a la ecuación (2). Mediante un simple cálculo, se tiene que

$$\begin{aligned} v((\varphi \,|\, \psi)) &= 1 - \text{mín}\{v(\varphi), v(\psi)\} && \text{definición de } | \\ &= 1 - v((\varphi \wedge \psi)) && \text{definición de valuación} \\ &= v((\neg(\varphi \wedge \psi))) && \text{definición de valuación} \end{aligned}$$

Luego, a nivel semántico, decir "$\varphi \mid \psi$" es exactamente lo mismo que decir "$(\neg(\varphi \wedge \psi))$" (una es "cierta" si y sólo si la otra lo es). Diremos entonces que $\mid$ *es expresable en términos de* $\neg$ *y* $\vee$.

**Ejercicio 5.** Comprobar que $v(\#(p_0, p_1, p_2)) = v((p_0 \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))))$ para toda $v$. Es decir, $\#$ es expresable en términos de $\wedge$, $\neg$ y $\vee$.

Estos ejemplos son testigos de un resultado muy general:

**Teorema 15.** *Todo conectivo se puede expresar en términos de* $\wedge$, $\vee$ *y* $\neg$.

*Demostración.* Un conectivo $\#$ viene dado por una función booleana (la $H_\#$). Sabemos por la teoría de reticulados que toda función booleana se puede expresar como un expresión booleana de sus argumentos. Pero una expresión booleana se construye a partir de $+$, $'$ y de $\cdot$ (superposición). Revisando las definiciones de $H_\vee$, $H_\neg$ y $H_\wedge$ de la definición de valuación (ver ejercicio 2), se puede ver que

$$\begin{aligned} x + y &= H_\vee(x, y) \\ xy &= H_\wedge(x, y) \\ x' &= H_\neg(x) \end{aligned}$$

donde $x, y \in \{0, 1\}$. Luego la expresión booleana asociada a $H_\#$ se traduce directamente a una expresión de $\#$ en términos de $\wedge$, $\vee$ y $\neg$. $\square$

**Definición 16.** Un conjunto $\mathcal{C}$ de conectivos es *funcionalmente completo* si y sólo si todo conectivo es expresable en términos de elementos de $\mathcal{C}$.

Luego, el Teorema 15 dice que $\{\wedge, \vee, \neg\}$ es funcionalmente completo.

## 1.5. Ejercicios

1. Dé series de formación de las siguientes proposiciones:

   *a)* $\big(((\neg p_2) \to (p_3 \vee (p_1 \leftrightarrow p_2))) \wedge (\neg p_3)\big)$,

   *b)* $\Big((p_7 \to \bot) \leftrightarrow \big((p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1\big)\Big)$,

   *c)* $\big((((p_1 \to p_2) \to p_1) \to p_2) \to p_1\big)$.

2. Demuestre que si $\varphi$, $\psi$ y $\xi$ son proposiciones, también lo es $((\varphi \wedge \psi) \to (\neg \xi))$.

3. Demuestre que toda $\varphi \in PROP$ tiene tantos "(" como ")". Además, vea que la cantidad de paréntesis ("abre" y "cierra", todos juntos) es igual a doble de la cantidad de conectivos distintos de $\bot$ que ocurren.

4. Demuestre que $(p_0) \notin PROP$.

5. Defina recursivamente una función $\Sigma(\varphi)$ que devuelva una serie de formación de $\varphi$ para cada $\varphi \in PROP$.

6. Ídem al anterior para "complejidad de $\varphi$", donde la complejidad de una proposición viene dada por la cantidad de ocurrencias de conectivos en la proposición.

7. Ídem al anterior para "longitud de $\varphi$", considerando a $\varphi$ como una sucesión de símbolos (incluyendo paréntesis).

8. Se define la noción de *subfórmula* de la siguiente manera (recursiva):

   $\boxed{\varphi \in At}$ $\psi$ es subfórmula de $\varphi$ si $\psi = \varphi$.

   $\boxed{(\neg\varphi)}$ $\psi$ es subfórmula de $(\neg\varphi)$ si $\psi$ es subfórmula de $\varphi$ ó $\psi = (\neg\varphi)$.

   $\boxed{(\varphi \,\square\, \chi)}$ $\psi$ es subfórmula de $(\varphi \,\square\, \chi)$ si $\psi$ es igual a $(\varphi \,\square\, \chi)$ ó si es subfórmula de $\varphi$ ó de $\chi$.

   *a*) Demostrar que si $\psi$ es subfórmula de $\varphi$, entonces $\psi$ es un término de la sucesión $\Sigma(\varphi)$ del ejercicio 5. En general, toda subfórmula aparecerá en cada serie de formación de $\varphi$.
   *b*) (*) Encontrar el conjunto $A$ y las funciones $H_\bullet$ del Teorema 6 para esta definición[6] (Ayuda mezquina: $A \neq PROP$).

9. Pruebe el Corolario 9 por inducción en subfórmulas.

10. Determine $\varphi[((\neg p_0) \to p_3)/p_0]$ para $\varphi = ((p_1 \wedge p_0) \to (p_0 \to p_3))$ y $\varphi = ((p_3 \leftrightarrow p_0) \vee (p_2 \to (\neg(p_0))))$.

11. Suponga $\varphi_1, \ldots, \varphi_n = \varphi$ es serie de formación de $\varphi$.

    *a*) Probar que $\varphi_1[\bot/p_0], \ldots, \varphi_n[\bot/p_0]$ es serie de formación de $\varphi[\bot/p_0]$.
    *b*) ¿Vale en general que $\varphi_1[\psi/p_0], \ldots, \varphi_n[\psi/p_0]$ es serie de formación de $\varphi[\psi/p_0]$ para todas $\varphi, \psi$?

12. Decida si las siguientes funciones de $PROP$ a $\{0,1\}$ son valuaciones:

    *a*) $v(\varphi) := 1$ para toda $\varphi \in PROP$.
    *b*) $v(\varphi) := 0$ para toda $\varphi \in PROP$.
    *c*) Dada $v$ valuación, defino $\bar{v} : PROP \to \{0,1\}$ como $\bar{v}(\varphi) := v(\varphi[\bot/p_0])$. Además de decidir, describa a $\bar{v}$ con sus palabras. Pregunte a su compañero si entiende su definición ☺.

13. Escribamos $\varphi \models \psi$ cuando $\{\varphi\} \models \psi$. Pruebe que la relación así definida ("ser consecuencia de") es transitiva y reflexiva en $PROP$.

14. Pruebe que $\models \varphi \to \psi$ si y sólo si $\varphi \models \psi$.

15. Pruebe que $p_0 \not\models (p_0 \wedge p_1)$ y que $\{p_0, (p_0 \to (p_1 \vee p_2)\} \not\models p_2$.

16. Sea $\varphi \in PROP$. Demostrar que si $\models p \to \varphi$ para todo $p \in At$, entonces $\models \varphi$.

17. Diremos que $\varphi$ es *(semánticamente) equivalente a* $\psi$ si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$. Encontrar proposiciones equivalentes a las siguientes que sólo contengan los conectivos $\to$ y $\neg$:

    *a*) $(p_0 \wedge p_1)$
    *b*) $((p_0 \vee p_2) \leftrightarrow p_3)$

18. Demostrar que $\{\to, \bot\}$ y $\{|\}$ son funcionalmente completos.

[6]Los ejercicios con una "(*)" son un poco más duros. Por ahí conviene dejarlos para el final.

# 2. Deducción Natural

Si uno piensa a la lógica como una codificación del razonamiento, entonces debería analizarse de cerca el proceso de realizar inferencias, es decir, obtener conclusiones a partir de premisas de manera *correcta*. Estudiaremos entonces un sistema de deducción (formalizado por G. Gentzen en 1934) que modela el modo de razonamiento (en su faceta proposicional) que se utiliza, por ejemplo, en matemática. Para hacer más simple la notación, utilizaremos una tabla de precedencia para evitar poner paréntesis:

$$\boxed{\begin{array}{c} \neg \\ \wedge\ \vee \\ \to \\ \leftrightarrow \end{array}}$$

En particular, eliminaremos los paréntesis exteriores de cada fórmula. Así, en vez de

$$\big((p_7 \to \bot) \leftrightarrow (p_4 \wedge (\neg p_2)) \to p_1\big)$$

escribiremos $p_7 \to \bot \leftrightarrow p_4 \wedge \neg p_2 \to p_1$. En esta sección nos restringiremos a los conectivos $\wedge$, $\to$ y $\bot$ —a nivel semántico, dicha restricción es aparente, ya que $\{\to, \bot\}$ es funcionalmente completo. Utilizaremos asimismo el principio de inducción en subfórmulas restringido a estos conectivos; i.e., "$\Box$" sólo será "$\wedge$" ó "$\to$".[7] Además, definiremos "$\neg\varphi$" como "$\varphi \to \bot$" y "$\top$" como "$\neg\bot$" (es decir, consideramos al resto de los conectivos como abreviaciones de expresiones que involucran sólo a elementos de $\{\wedge, \to, \bot\}$).

## 2.1. Reglas de Inferencia

En pocas palabras, un sistema deductivo es mecanismo formal para pasar de algunas proposiciones iniciales ("premisas") a otra ("conclusión") mediante un conjunto de reglas sintácticas. Nuestro objetivo será describir reglas que se adecuen a nuestra noción intuitiva de "razonamiento correcto". En particular, tendremos reglas *de introducción* que a partir de las premisas (por ejemplo, $\varphi$ y $\psi$) concluyen una fórmula con un conectivo más (por ejemplo, $\varphi \wedge \psi$); y también reglas *de eliminación* en las que la conclusión se borró alguna conectiva que aparecía en las premisas (por ejemplo pasar de $\varphi \wedge \psi$ a $\varphi$). Las dos reglas que ejemplificamos se llaman, respectivamente, *introducción de* $\wedge$ y *eliminación de* $\wedge$ y se pueden representar mediante los dos primeros diagramas de los que siguen:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge I \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge E \qquad\qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge E$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,\to E \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\,\to I \qquad\qquad \frac{\bot}{\varphi}\,\bot \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg\varphi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,RAA$$

Antes de dar la definición formal de derivación, conviene hacer algún ejemplo para conocer el funcionamiento de la deducción natural de manera intuitiva:

[7] Se ve fácilmente que con esta inducción "reducida" se pueden probar afirmaciones sobre proposiciones que son construidas utilizando sólo $\wedge$, $\to$ y atómicas.

*Ejemplo* 4. Tratemos de hallar una "codificación" simbólica de una demostración de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$. Para ello, nos fijamos que hay una sola regla que permite deducir una implicación de manera explícita, y es la regla $(\to I)$ ("introducción de $\to$"). Reemplazando,

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi \wedge \psi]_1 \\ \vdots \\ \psi \wedge \varphi\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$

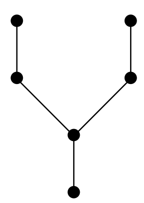
Esto significa que "Si tomando como *hipótesis* $\varphi \wedge \psi$ puedo deducir $\psi \wedge \varphi$, entonces tengo una prueba de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$". Los corchetes subindizados con "1" dicen que en el paso "$(\to I)$" de la derivación *cancelamos* la hipótesis $\varphi \wedge \psi$.

Ahora tenemos que reemplazar los puntos suspensivos por una deducción que lleve de $\varphi \wedge \psi$ a $\psi \wedge \varphi$. Haciendo la misma observación de hace un rato, la única regla que tiene como conclusión una conjunción es la $(\wedge I)$ ("introducción de $\wedge$"). Seguimos completando:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\varphi \wedge \psi]_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\psi \quad \varphi}{\psi \wedge \varphi} \wedge I\end{matrix}}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$

Necesitamos llegar desde nuestra hipótesis $\varphi \wedge \psi$ a cada uno de los términos de la conjunción. Pero para ello, las reglas $(\wedge E)$ ("eliminación de $\wedge$") nos vienen al pelo. Nos hacen falta dos copias de $\varphi \wedge \psi$ a tal fin (una para deducir $\varphi$ y otra para $\psi$). No hay problema, porque como sucede en una demostración matemática, cada vez que se hace una suposición, se la puede utilizar tantas veces como uno quiera:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi} \wedge E \quad \dfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi} \wedge E}{\psi \wedge \varphi} \wedge I}{\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi} \to I_1$$



Este árbol (notar su estructura a la derecha) es una "derivación" de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.

Definiremos paralelamente las nociones de *derivación* y *conclusión* e *hipótesis* de una derivación. Con

$$\begin{matrix}\vdots\, D \\ \varphi\end{matrix}$$

indicaremos una derivación $D$ cuya conclusión es $\varphi$. Del mismo modo, con

$$\begin{matrix}\psi \quad \psi' \\ \vdots\, D \\ \varphi\end{matrix}$$

indicaremos una derivación entre cuyas "hipótesis no canceladas" se encuentran *eventualmente* $\psi$ y $\psi'$. Si no hace falta poner nombres (por ejemplo, "$D$", más arriba), simplemente escribiremos

$$\begin{matrix}\vdots \\ \varphi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\psi \quad \psi' \\ \vdots \\ \varphi\end{matrix}\ .$$

**Definición 17.** El conjunto $\mathcal{D}$ de las *derivaciones*, será el menor conjunto de árboles tal que:

($PROP$) Toda $\varphi \in PROP$ pertenece a $\mathcal{D}$. La conclusión de la derivación $\varphi$ es la proposición $\varphi$, y su conjunto de hipótesis no canceladas es $\{\varphi\}$.

($\wedge I$) Si $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}$ son derivaciones (i.e., están en $\mathcal{D}$), entonces $D'' := \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots D & \vdots D\\ \varphi & \varphi\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I$ pertenece a $\mathcal{D}$. Su conclusión es $\varphi \wedge \varphi'$ y las hipótesis no canceladas son las de $D$ y $D'$ en conjunto.

($\wedge E$) Si $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}$ está en $\mathcal{D}$ entonces $D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E$ y $D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E$ son derivaciones, con conclusión $\varphi$ y $\varphi'$ respectivamente, y las hipótesis no canceladas son las de $D$.

($\to I$) Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots D\\ \psi\end{array}$ en $\mathcal{D}$, tenemos que $D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I$ es una derivación cuyas hipótesis no canceladas son las de $D$ **quitando** $\varphi$.

($\to E$) Si $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi \to \psi\end{array}$ están en $\mathcal{D}$, entonces $D'' := \dfrac{\begin{array}{cc}\vdots D & \vdots D'\\ \varphi & \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}\to E$ es una derivación con hipótesis no canceladas las de $D$ y $D'$ en conjunto.

($\perp$) Si tenemos $\begin{array}{c}\vdots D\\ \perp\end{array}$, entonces para toda $\varphi \in PROP$, $D' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \perp\end{array}}{\varphi}\perp$ está en $\mathcal{D}$ y sus hipótesis no canceladas son las de $D$.

($RAA$) Dada una derivación $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots D\\ \perp\end{array}$, $D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots D\\ \perp\end{array}}{\varphi}RAA$ está en $\mathcal{D}$ y sus hipótesis no canceladas son las de $D$ **menos** $\neg\varphi$

En las reglas ($\to I$) y ($RAA$) no es necesario que las hipótesis $\varphi$ y $\neg\varphi$ (respectivamente) aparezcan en la derivación $D$. En tal caso, las hipótesis no canceladas de la nueva derivación son las mismas que las de $D$.

Para cada derivación $D \in \mathcal{D}$ llamaremos $Concl(D)$ a su conclusión y denotaremos con $Hip(D)$ al *conjunto* de hipótesis no canceladas de $D$.

*Ejemplo* 5. Veamos que la derivación que habíamos esbozado de $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$ está en $\mathcal{D}$.

1. $\varphi \wedge \psi$ es una derivación por la regla $(PROP)$. Tenemos $Concl(\varphi \wedge \psi) = \varphi \wedge \psi$ y $Hip(\varphi \wedge \psi) = \{\varphi \wedge \psi\}$.

2. Como $\varphi\wedge\psi$ es una derivación, puedo aplicar la regla $(\wedge E)$ y obtener las derivaciones $D_1 := \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$ y $D_2 := \dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \wedge E$, donde hemos tomado $D = \varphi \wedge \psi$, que cumple con la condición necesaria para aplicar esta regla. La única hipótesis no cancelada de $D_1$ y $D_2$ es $\varphi \wedge \psi$.

3. Usando las derivaciones $D_1$ y $D_2$ podemos aplicar el caso $(\wedge I)$ (nuestras $D, D'$ son $D_1, D_2$, respectivamente). Obtenemos una nueva derivación

$$D_3 := \cfrac{\begin{array}{c}\varphi \wedge \psi\\ \vdots\, D_1\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\varphi \wedge \psi\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\end{array}}{\psi \wedge \varphi}\wedge I \quad = \quad \cfrac{\cfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\wedge E \quad \cfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I .$$

   La conclusión de $D_3$ es $\psi \wedge \varphi$ como se indica, y las hipótesis son las hipótesis de $D_1$ y $D_2$ en conjunto. Como sólo está $\varphi \wedge \psi$, queda ella como única hipótesis no cancelada.

4. Este paso es menos trivial, vamos a aplicar $(\rightarrow I)$. El caso nos indica que podemos pasar de $\begin{array}{c}\varphi \wedge \psi\\ \vdots\, D_3\\ \psi \wedge \varphi\end{array}$ a

$$D_4 := \cfrac{\begin{array}{c}[\varphi \wedge \psi]_1\\ \vdots\, D_3\\ \psi \wedge \varphi\end{array}}{\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \varphi}\rightarrow I_1 \quad = \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\psi}\wedge E \quad \cfrac{[\varphi \wedge \psi]_1}{\varphi}\wedge E}{\psi \wedge \varphi}\wedge I}{\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi \wedge \psi}\rightarrow I_1 ,$$

   donde hemos cancelado la hipótesis $\varphi \wedge \psi$. Esta nueva derivación $D_4$ tiene por hipótesis a las de $D_3$ menos $\varphi \wedge \psi$, pero como ésta era la única hipótesis de $D_3$, $D_4$ tiene todas sus hipótesis canceladas; en símbolos, $Hip(D_4) = \emptyset$, i.e., todas las hipótesis fueron canceladas.

*Ejemplo* 6. Hallemos una derivación cuyas hipótesis estén todas canceladas y su conclusión sea $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$.

Para demostrar este tipo de proposición, basta ver que si suponemos cierto el antecedente, podemos demostrar el consecuente. Entonces haremos una lista numerada de las hipótesis que utilizamos, que luego serán canceladas mediante la introducción de $\rightarrow$. De esta manera, este ejercicio y muchos otros similares se resuelven desde abajo para arriba, como vemos a continuación. Partimos de lo que queremos probar:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)\end{array}$$

tomamos el antecedente como hipótesis y lo anotamos para uso futuro:

1. $\varphi \to \psi$

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ (\neg\psi \to \neg\varphi)\end{matrix}}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Podemos hacer lo mismo ahora con $(\neg\psi \to \neg\varphi)$: sacar el antecedente y usarlo como hipótesis:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \neg\varphi\end{matrix}}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Recordemos que $\neg\varphi$ es una abreviación de $\varphi \to \bot$, luego podemos hacer una vez más el mismo procedimiento:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$
3. $\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi} \to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Ahora la tarea se reduce a llegar a $\bot$ usando nuestras tres hipótesis. Ahora comenzamos a trabajar de arriba para abajo: podemos deducir $\psi$ de la primera y la tercera hipótesis:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$
3. $\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\varphi \to \psi]_1}{\psi} \to E\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg\varphi} \to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

Notemos que en las inferencias subindizadas con 1 y 3 se cancelan las respectivas hipótesis, así que por eso las ponemos entre corchetes (respectivamente subindizados).

De esta $\psi$ y la segunda hipótesis obtenemos $\bot$ y queda todo conectado:

1. $\varphi \to \psi$
2. $\neg\psi$
3. $\varphi$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3 \quad [\varphi \to \psi]_1}{\psi} \to E \qquad [\neg\psi]_2}{\bot} \to E}{\neg\varphi} \to I_3}{(\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_2}{(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)} \to I_1$$

*Ejemplo* 7. Hallemos una derivación de $\varphi \to (\psi \to \varphi)$. Como hicimos anteriormente, podemos tratar de derivar $\psi \to \varphi$ tomando como hipótesis a $\varphi$. Y a su vez, para derivar

$\psi \to \varphi$ suponer $\psi$ y derivar $\varphi$. Escribimos la lista de nuestras hipótesis y a lo que queremos llegar:

1. $\varphi$
2. $\psi$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\end{matrix}}{\psi \to \varphi}\to I_2}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1 .$$

Esperemos un momento: ¡lo que queremos derivar ya es parte de lo que estamos suponiendo! Es decir, podemos dejar la derivación tal como está:

1. $\varphi$
2. $\psi$

$$\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1}{\psi \to \varphi}\to I_2}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\to I_1 .$$

Surge la pregunta: ¿qué hipótesis cancelamos en el primer paso? La respuesta es "ninguna", y la moraleja es: en una introducción de "$\to$", no hace falta que la hipótesis a cancelar aparezca en la derivación.

**Ejercicio 6.** Pensar por qué funciona así esto, dando una demostración de:

> Si $x^2 + y^2 \geq 0$ para todo $x$ e $y$, entonces 8 es múltiplo de 2.

*Ejemplo* 8. Haremos una derivación que requiere el uso esencial de $(RAA)$, que es la regla menos *intuitiva*[8]. Veamos que hay una derivación de $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ con todas sus hipótesis canceladas. Como antes, podemos tomar como hipótesis el antecedente y tratar de derivar el consecuente:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg\psi \to \neg\varphi]_1\\ \vdots\\ \varphi \to \psi\end{matrix}}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\to I_1$$

y otra vez lo mismo:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]_2 \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi \to \psi}\to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)}\to I_1$$

Ahora estamos trabados, porque no podemos extraer más hipótesis evidentes. Pero podemos "pedir prestada" una $\neg\psi$ (que pensamos utilizar con $\neg\psi \to \neg\varphi$) y cancelarla más

[8] En la lógica proposicional *intuicionista*, se permite el uso de todas las reglas menos la reducción al absurdo. El Intuicionismo está relacionado con la corriente *constructivista* en matemática (L.E.J. Brouwer, A. Heyting) y tiene importantes consecuencias en ciencias de la computación. Un ejemplo paradigmático de esto es el *Isomorfismo de Curry-Howard*, que muestra que hay una equivalencia entre pruebas intuicionistas y algoritmos.

tarde:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_2 \qquad \dfrac{\neg\psi \quad [\neg\psi \to \neg\varphi]_1}{\neg\varphi} \to E \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1
$$

Ahora ya podemos usar la $\varphi$ que teníamos descolgada.

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\varphi]_2 \qquad \dfrac{[\neg\psi \to \neg\varphi]_1 \quad \neg\psi}{\neg\varphi} \to E}{\bot} \to E \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1
$$

Los puntos suspensivos los podemos sacar: notemos que tenemos una $\neg\psi$ sin cancelar y $(RAA)$ nos permite cancelarla si tenemos una derivación con conclusión $\bot$, obteniendo así $\psi$ (Oh, ¡caramba! ¡Qué coincidencia!).

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\psi \to \neg\varphi]_1 \quad [\neg\psi]_3}{\neg\varphi} \to E \qquad [\varphi]_2}{\bot} \to E}{\psi} RAA_3}{\varphi \to \psi} \to I_2}{(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)} \to I_1
$$

Resulta que en general, $(RAA)$ funciona pidiendo las hipótesis que hagan falta, y luego todo cierra *casi* por arte de magia.

Como se vio más arriba, también se puede derivar $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, pero esta última es "constructiva" (no utiliza $(RAA)$). En conjunto (y aplicando la regla $(\wedge I)$), hemos derivado $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$.

Como $\mathcal{D}$ tiene una definición recursiva, podemos establecer análogos a los Teoremas 2 y 6.

**Teorema 18** (inducción en derivaciones)**.** *Sea $A$ un predicado definido en $\mathcal{D}$. Luego $A(D)$ es verdadero para toda $D \in \mathcal{D}$ si y sólo si:*

$(PROP)$ *Si $\varphi \in PROP$, $A(\varphi)$ vale.*

$(\wedge I)$ *Si se dan* $A\begin{pmatrix}\vdots \\ \varphi\end{pmatrix}$ *y* $A\begin{pmatrix}\vdots \\ \varphi'\end{pmatrix}$*, entonces se da* $A\left(\dfrac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots \\ \varphi & \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'} \wedge I\right)$.

$$(\wedge E)\ \textit{Si se da } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi \wedge \varphi' \end{pmatrix}, \textit{ entonces se dan } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \dfrac{\varphi \wedge \varphi'}{\varphi}\wedge E \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} \vdots \\ \dfrac{\varphi \wedge \varphi'}{\varphi'}\wedge E \end{pmatrix}.$$

$$(\to I)\ A\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{pmatrix} \textit{ implica } A\begin{pmatrix} [\varphi] \\ \vdots \\ \dfrac{\psi}{\varphi \to \psi}\to I \end{pmatrix}.$$

$$(\to E)\ \textit{Si se dan } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi \end{pmatrix} \textit{ y } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi \to \psi \end{pmatrix}, \textit{ entonces se da } A\begin{pmatrix} \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\to E \end{pmatrix}.$$

$$(\bot)\ \textit{Si tenemos } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \bot \end{pmatrix}, \textit{ entonces para toda } \varphi \in PROP, \textit{ se da } A\begin{pmatrix} \vdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi}\bot \end{pmatrix}.$$

$$(RAA)\ \textit{Si se da } A\begin{pmatrix} \neg\varphi \\ \vdots \\ \bot \end{pmatrix} \textit{ entonces se da } A\begin{pmatrix} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi}RAA \end{pmatrix}.$$

**Teorema 19** (recursión en derivaciones)**.** *Sea $A$ un conjunto y sean dadas funciones $H_P$ de $PROP$ en $A$, $H_{\wedge E1}$, $H_{\wedge E2}$, $H_\bot$, $H_{RAA}$, $H_{\to I}$ de $A$ en $A$ y $H_{\wedge I}, H_{\to E}$ de $A \times A$ en $A$. Luego existe una única función $F : \mathcal{D} \to A$ tal que se cumplen recursiones análogas a las del Teorema 6 según la Definición 17. Es decir, $F$ satisface,*

| | |
|---|---|
| $F(\varphi) = H_P(\varphi)$ | *si $\varphi \in PROP$* |
| $F(D) = H_{\wedge I}(F(D_1), F(D_2))$ | *si $D$ se obtiene de $D_1$ y $D_2$ mediante una aplicación de $(\wedge I)$* |
| $F(D) = H_{\wedge E1}(F(D'))$ | *si $D$ se obtiene de $D'$ mediante una aplicación del primer caso de $(\wedge E)$* |
| $F(D) = H_{\wedge E2}(F(D'))$ | *si $D$ se obtiene de $D'$ mediante una aplicación del segundo caso de $(\wedge E)$* |
| ... | ... |

*y así sucesivamente.*

*Ejemplo* 9. Definiremos la función $cant : \mathcal{D} \to N$ que toma una derivación $D$ y devuelve el número de *ocurrencias de proposiciones* en $D$.

$(PROP)$ Si $\varphi \in PROP$, $cant(\varphi) := 1$.

$(\wedge I)$

$$cant\begin{pmatrix} \vdots D \qquad \vdots D' \\ \dfrac{\varphi \qquad \varphi'}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I \end{pmatrix} := cant\begin{pmatrix} \vdots D \\ \varphi \end{pmatrix} + cant\begin{pmatrix} \vdots D' \\ \varphi' \end{pmatrix} + 1.$$

$(\wedge E)$

$$cant\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\varphi'\end{matrix}}{\varphi}\wedge E\right) = cant\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \varphi\wedge\varphi'\end{matrix}}{\varphi'}\wedge E\right) := cant\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\wedge\varphi'\end{pmatrix} + 1.$$

$(\to I)$

$$cant\left(\dfrac{\begin{matrix}[\varphi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\varphi\to\psi}\to I\right) := cant\begin{pmatrix}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{pmatrix} + 1.$$

$(\to E)$

$$cant\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots & \vdots\\ \varphi & \varphi\to\psi\end{matrix}}{\psi}\to E\right) := cant\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\end{pmatrix} + cant\begin{pmatrix}\vdots\\ \varphi\to\psi\end{pmatrix} + 1.$$

$(\perp)$

$$cant\left(\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}\perp\right) := cant\begin{pmatrix}\vdots\\ \perp\end{pmatrix} + 1$$

$(RAA)$

$$cant\left(\dfrac{\begin{matrix}[\neg\varphi]\\ \vdots\\ \perp\end{matrix}}{\varphi}RAA\right) := cant\begin{pmatrix}\neg\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{pmatrix} + 1.$$

**Definición 20.** Sean $\Gamma \subseteq PROP$, $\varphi \in PROP$. Decimos que $\varphi$ *se deduce de* $\Gamma$ (y escribimos "$\Gamma \vdash \varphi$") si y sólo si existe una derivación con conclusión $\varphi$ tal que todas sus hipótesis no canceladas estén en $\Gamma$. Diremos que $\varphi$ es un *teorema* cuando $\emptyset \vdash \varphi$, y abreviaremos por "$\vdash \varphi$".

Dicho más brevemente, $\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y $Hip(D) \subseteq \Gamma$, y $\vdash \varphi$ si existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $Concl(D) = \varphi$ y tiene todas sus hipótesis canceladas.

*Ejemplo* 10.

1. $\Gamma \vdash \varphi$ siempre que $\varphi \in \Gamma$.

   En este caso debemos considerar a $\varphi$ como un elemento de $\mathcal{D}$: tiene como conclusión $\varphi$ (ella misma) y todas sus hipótesis (viz., $\{\varphi\}$) están en $\Gamma$ trivialmente.

2. $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \vdash \psi$.

   Basta ver la regla $(\to E)$ para darse cuenta de esto.

3. $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$.

   La derivación del ejemplo 5 tiene todas sus hipótesis canceladas, así que nos sirve.

4. Por el ejemplo 6 obtenemos $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$, y con el ejemplo 8 conseguimos $\vdash (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$.

5. $\Gamma \vdash \perp$ implica $\Gamma \vdash \varphi$ para toda $\varphi$ en $PROP$.

Supongamos que hay una derivación $\begin{array}{c}\vdots D\\ \bot\end{array}$ con $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y sea $\varphi \in PROP$ arbitraria. Luego, usando $(\bot)$ sabemos que $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,\bot$ es una derivación, y por construcción tiene las mismas hipótesis (no canceladas) que $D$ (revisar la Definición 17). Luego, sus hipótesis no canceladas están en $\Gamma$ y entonces $\Gamma \vdash \varphi$. Como $\varphi$ era arbitraria, esto vale en general.

*Ejemplo* 11. Ver que $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$. Procedemos como en el ejemplo 4: si queremos derivar una implicación, basta conseguir una derivación del consecuente cuyas hipótesis pueden (o no) incluir el antecedente. En nuestro caso, la única hipótesis distinta de tal antecedente (viz., $\varphi$) que puede aparecer es $\neg\varphi$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1 \quad \neg\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

Pero de $\varphi$ y $\neg\varphi = \varphi \to \bot$ podemos derivar $\bot$ mediante una eliminación de "$\to$":

$$\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot}\to E\\ \vdots\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

Por último, usando la regla $(\bot)$ puedo obtener $\psi$ a partir de $\bot$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1 \quad \neg\varphi}{\bot}\to E}{\psi}\,\bot}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

Con esto completamos una derivación de $\varphi \to \psi$ con (única) hipótesis no cancelada $\neg\varphi$.

## 2.2. Teorema de Completitud

Hasta ahora, tenemos dos familias de conceptos aparentemente diferentes entre sí:

| **Estructuras** | | **Sintaxis** |
|---|---|---|
| Tautologías (valuar 1) | $\longleftrightarrow$ | Teoremas (derivable) |
| $\models$ | $\longleftrightarrow$ | $\vdash$ |
| Valuaciones (modelo) | $\longleftrightarrow$ | Derivaciones (pruebas formales) |

Todos estos conceptos son *equivalentes* en el sentido del siguiente

**Teorema 21** (Completitud y Corrección de la Lógica Proposicional)**.** *Para todos* $\Gamma \subseteq PROP$ *y* $\varphi \in PROP$*, se tiene*

$$\Gamma \models \varphi \text{ si y sólo si } \Gamma \vdash \varphi$$

Estrictamente hablando, se llama “completitud” a la implicación directa (es decir, el “*sólo si*”), mientras que a la vuelta (el “*si*”) se la llama “corrección”, porque asegura que no se pueden deducir cosas falsas.

**Teorema 22** (Corrección)**.** *Si* $\Gamma \vdash \varphi$, *entonces* $\Gamma \models \varphi$.

*Demostración.* Probaremos por inducción en derivaciones el siguiente enunciado:

> “Para toda $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array} \in \mathcal{D}$ se da lo siguiente: Si $\Gamma$ es tal que $\mathit{Hip}(D) \subseteq \Gamma$, se da $\Gamma \models \varphi$”.

($\mathit{PROP}$) Supongamos $D = \varphi$. Si $\mathit{Hip}(D) = \{\varphi\} \subseteq \Gamma$, tenemos $\varphi \in \Gamma$, e inmediatamente $\Gamma \models \varphi$.

($\wedge I$) Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}$ satisfacen la hipótesis inductiva, y supongamos que las hipótesis no canceladas de $D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D'\\ \varphi'\end{array}}{\varphi \wedge \varphi'}\wedge I$ están incluidas en $\Gamma$. Como $\mathit{Hip}(D'') = \mathit{Hip}(D) \cup \mathit{Hip}(D')$, $\Gamma$ contiene tanto las hipótesis de $D$ como las de $D'$, así que $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi'$ por hipótesis inductiva. Sea $v$ una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$. [9] Luego obtenemos $v(\varphi) = v(\varphi') = 1$, y por definición de valuación tenemos $v(\varphi \wedge \varphi') = 1$. Como $v$ era arbitraria, se sigue que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$.

($\wedge E$) Supongamos que $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}$ satisface la hipótesis inductiva y tomemos

$$D_1 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi}\wedge E \qquad D_2 := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \wedge \varphi'\end{array}}{\varphi'}\wedge E.$$

Veamos el caso de $D_1$; sea $\Gamma$ que contenga $\mathit{Hip}(D_1)$. Como $\mathit{Hip}(D_1) = \mathit{Hip}(D)$, sabemos (por hip. ind.) que $\Gamma \models \varphi \wedge \varphi'$. Sea $v$ una valuación tal que $v(\Gamma) = 1$. Tenemos entonces que $v(\varphi \wedge \varphi') = 1$, y por definición de valuación, $v(\varphi) = 1$. Como $v$ era una valuación de $\Gamma$ arbitraria, esto muestra que $\Gamma \models \varphi$. El caso de $D_2$ es igual.

($\to I$) Supongamos que $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots D\\ \psi\end{array} \in \mathcal{D}$ satisface la hipótesis inductiva. Veamos que la derivación $D'$ de la derecha también la satisface. Sea $\Gamma$ conteniendo las hipótesis de $D'$, es decir, $\Gamma$ contiene las hipótesis de $D$ menos $\varphi$. Tomemos ahora $\Gamma' = \Gamma \cup \{\varphi\}$; $\Gamma'$ contiene todas las hipótesis de $D$. Por hip. ind., $\Gamma' \models \psi$. Sea $v$ tal que $v(\Gamma) = 1$. Si suponemos que $v(\varphi) = 1$, $v$ es también una valuación tal que $v(\Gamma') = 1$, y por ende $v(\psi) = 1$, así que se da $v(\varphi \to \psi) = 1$. Si $v(\varphi) = 0$ también se da $v(\varphi \to \psi) = 1$, y en consecuencia $\Gamma \models \varphi \to \psi$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1\\ \vdots D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi}\to I_1$$

[9] Ver el párrafo siguiente a la Definición 10.

($\to E$) Sean $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi\to\psi\end{array} \in \mathcal{D}$ satisfaciendo la hip. ind. Sea $D'' := \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\psi} \to E$

y supongamos que $\Gamma$ contiene $Hip(D'')$. Como $Hip(D'')$ es el conjunto formado por las hipótesis de $D$ y las de $D'$, $\Gamma$ contiene a estas últimas; por hip. ind., $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \varphi \to \psi$. Sea $v$ tal que $v(\Gamma) = 1$. Luego $v(\varphi) = 1$ y $v(\varphi \to \psi) = 1$. Si $v(\psi)$ fuera 0, tendríamos que $v(\varphi \to \psi) = 0$, una contradicción. En conclusión, debe ser $v(\psi) = 1$ y luego (pues $v$ era arbitraria) $\Gamma \models \psi$.

($RAA$) Sea $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ satisfaciendo la hip. ind. Sea $\Gamma$ conteniendo las hipótesis de $D'$ de la derecha; análogamente al caso ($\to I$), $\Gamma$ contiene las hipótesis de $D$ menos $\neg\varphi$. Supongamos (por el absurdo) que $\Gamma \not\models \varphi$; luego hay una valuación $v$ tal que $v(\Gamma) = 1$ y $v(\varphi) = 0$, y en consecuencia $v(\neg\varphi) = 1$. En resumen $v$ es una valuación tal que $v(\Gamma') = 1$,

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi} RAA_1$$

con $\Gamma' = \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\Gamma'$ contiene todas las hipótesis de $D$. Por hip. ind., $\Gamma' \models \bot$. Pero entonces se debería dar $v(\bot) = 1$, una contradicción. En consecuencia, $\Gamma \models \varphi$.

($\bot$) Sea $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}$ que satisfaga la hip. ind., y sea $\varphi \in PROP$. La derivación $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\bot \in \mathcal{D}$ tiene las mismas hipótesis que $D$. El razonamiento es similar al caso ($RAA$), pero sin hacerse problemas con hipótesis canceladas. Queda como ejercicio muy fácil para el lector.

□

Demostraremos ahora una serie de lemas que nos conducirán a la Completitud. En toda esta sección, $\Gamma$ será un subconjunto de $PROP$. Comenzamos con una definición:

**Definición 23.** Un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es *inconsistente* si y sólo si $\Gamma \vdash \bot$. $\Gamma$ es *consistente* si no es inconsistente.

Esto parece un caso particular de lo que se decía más arriba; $\Gamma$ consistente si no puedo deducir a partir de él *una* ($\bot$) proposición falsa, pero es totalmente general, como lo muestra el siguiente

**Lema 24** (de Inconsistencia)**.** *Son equivalentes*

1. *$\Gamma$ es inconsistente.*
2. *Existe $\varphi \in PROP$ tal que $\Gamma \vdash \neg\varphi$ y $\Gamma \vdash \varphi$.*
3. *Para toda $\varphi \in PROP$ se da $\Gamma \vdash \varphi$.*

*Demostración.* Es obvio que $3 \Rightarrow 2$. También $2 \Rightarrow 1$ sale fácil: supongamos que $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot} \to E$$

tienen sus hipótesis no canceladas en $\Gamma$ (i.e., $Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Hip(D') \subseteq \Gamma$). Luego (teniendo en cuenta que $\neg\varphi = \varphi \to \bot$) la derivación de la izquierda tiene conclusión $\bot$ e hipótesis en $\Gamma$. La prueba de $1 \Rightarrow 3$ está en el ejemplo 10 ítem 5.

□

**Lema 25** (Criterio de Consistencia). *Si hay una valuación $v$ tal que $v(\psi) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, entonces $\Gamma$ es consistente.*

*Demostración.* Supongamos por el absurdo que $\Gamma \vdash \bot$. Por la Corrección de la lógica proposicional, $\Gamma \models \bot$, así que para toda valuación $v$ tal que $v(\Gamma) = 1$, se debe dar $v(\bot) = 1$. Pero como para toda $v$, $v(\bot) = 0$, llegamos a una contradicción. $\square$

*Ejemplo* 12. Probemos que $\Gamma := \{p_0 \to p_1,\ \neg p_2 \to p_0,\ p_5 \wedge \neg p_0\}$ es consistente. Para ello, basta encontrar una valuación de dicho conjunto. Utilizaremos el Teorema de Extensión a tal fin.

Sea $f : At \to \{0, 1\}$ definida de la siguiente manera: $f(\varphi) = 1$ si y sólo si $\varphi = p_2, p_5$. Como $f(\bot) = 0$, existe una valuación $[\![\cdot]\!]_f$ que extiende a $f$ sobre $PROP$. Vemos que esta valuación es de $\Gamma$:

$$\begin{aligned} [\![p_0 \to p_1]\!]_f = 0 &\text{ si y sólo si } [\![p_0]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_1]\!]_f = 0 && \text{por definición de valuación} \\ &\text{ si y sólo si } 0 = 1 \text{ y } [\![p_1]\!]_f = 0 && \text{por construcción de } f \\ &\text{ si y sólo si nunca.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\![p_5 \wedge \neg p_0]\!]_f &= \text{mín}\{[\![p_5]\!]_f, [\![\neg p_0]\!]_f\} && \text{por definición de valuación} \\ &= \text{mín}\{1, [\![\neg p_0]\!]_f\} && \text{por construcción de } f \\ &= \text{mín}\{1, 1 - [\![p_0]\!]_f\} && \text{por definición de valuación} \\ &= \text{mín}\{1, 1 - 0\} && \text{por construcción de } f \\ &= 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\![\neg p_2 \to p_0]\!]_f = 0 &\text{ si y sólo si } [\![\neg p_2]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por definición de valuación} \\ &\text{ si y sólo si } 1 - [\![p_2]\!]_f = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por definición de valuación} \\ &\text{ si y sólo si } 1 - 1 = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 && \text{por construcción de } f \\ &\text{ si y sólo si } 0 = 1 \text{ y } [\![p_0]\!]_f = 0 \\ &\text{ si y sólo si nunca.} \end{aligned}$$

**Definición 26.** Un conjunto $\Gamma$ es *consistente maximal* si y sólo si es consistente y para todo $\Gamma' \supseteq \Gamma$, si $\Gamma'$ también es consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$.

*Ejemplo* 13. Dada una valuación $v$, el conjunto $\Gamma := \{\varphi \in PROP\ :\ v(\varphi) = 1\}$ es un conjunto consistente maximal. Por el Lema 25, $\Gamma$ es consistente. Consideremos un $\Gamma'$ consistente y que contenga a $\Gamma$, es decir, $\Gamma \subseteq \Gamma'$. Ahora, supongamos por el absurdo $\psi \in \Gamma' \setminus \Gamma$. Luego $v(\psi) = 0$ y por ende $v(\neg\psi) = 1$; en conclusión $\neg\psi \in \Gamma$. Pero como $\Gamma \subseteq \Gamma'$, tenemos que $\Gamma'$ es inconsistente, una contradicción. Luego no hay elementos de $\Gamma'$ fuera de $\Gamma$, $\Gamma = \Gamma'$.

Este ejemplo de conjunto consistente maximal aparenta ser muy específico; sin embargo, como se verá más adelante, tiene toda la generalidad posible.

**Lema 27.** *Todo conjunto consistente $\Gamma$ está contenido en uno maximal $\Gamma^*$.*

*Demostración.* Las proposiciones forman un conjunto *numerable*, es decir, se puede hacer una lista $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ (con subíndices todos los números naturales) en la cual aparecen todas las proposiciones.

**Ejercicio 7.** (*) Pensar en un modo de llevar esto a cabo (Ayuda: considerar las proposiciones de complejidad menor que $n$ que tengan grado[10] menor que $n$. Son finitas, y toda proposición tiene grado y complejidad finitos).

Definiremos una sucesión no decreciente de conjuntos $\Gamma_i$ tal que la unión es consistente maximal.

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &:= \Gamma, \\
\Gamma_{n+1} &:= \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si resulta consistente} \\ \Gamma_n & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
\Gamma^* &:= \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n
\end{aligned}$$

Se puede probar por inducción en $n$ que cada $\Gamma_n$ es consistente (por construcción, $\Gamma_0$ es consistente; y si $\Gamma_n$ es consistente, $\Gamma_{n+1}$ es consistente, pues alguna de las dos opciones se da). Veamos que $\Gamma^*$ también lo es.

Por el absurdo, supongamos que $\Gamma^* \vdash \bot$. Luego hay una derivación $D$ con $Concl(D) = \bot$ y $Hip(D) \subseteq \Gamma^*$. Como $Hip(D)$ es un conjunto finito, hay un $N$ suficientemente grande tal que $Hip(D) \subseteq \Gamma_{N+1}$; de hecho, tomando $N := \max\{n : \varphi_n \in Hip(D)\}$ tenemos

$$Hip(D) \subseteq \Gamma^* \cap \{\varphi_0, \ldots, \varphi_N\} \subseteq \Gamma_{N+1}.$$

Entonces, $D$ es una derivación de $\bot$ con hipótesis en $\Gamma_{N+1}$. Esto es un absurdo, ya que $\Gamma_{N+1}$ es consistente.

$\Gamma^*$ es consistente maximal: para verlo, supongamos $\Gamma^* \subseteq \Delta$ con $\Delta$ consistente. Si $\psi \in \Delta$, entonces $\psi = \varphi_m$ para algún $m \geq 0$ (pues en nuestra enumeración aparecían **todas** las proposiciones). Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\Delta$ es consistente, $\Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$ es consistente. Luego $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\varphi_m\}$, i.e. $\varphi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$. Esto muestra que $\Gamma^* = \Delta$. □

**Lema 28.** *1. Si $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \varphi$.*

*2. Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$.*

*Demostración.* En cada caso hay derivaciones $\begin{array}{c}\neg\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ y $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}$ con hipótesis no canceladas en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$, respectivamente.

Luego las siguientes son derivaciones con hipótesis no canceladas en $\Gamma$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\varphi}\, RAA_1 \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]_1\\ \vdots\, D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi} \to I_1,$$

y queda probado el resultado. □

**Lema 29.** *Si $\Gamma$ es consistente maximal entonces es cerrado por derivaciones (i.e., $\Gamma \vdash \varphi$ implica $\varphi \in \Gamma$).*

[10] Ver Definición 1.2 y el ejercicio 6 de la sección 1.5.

*Demostración.* Supongamos $\Gamma \vdash \varphi$, y en busca de un absurdo supongamos que $\varphi \notin \Gamma$. Luego $\Gamma \cup \{\varphi\}$ debe ser inconsistente. Entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$ por el Lema 28, así que $\Gamma$ es inconsistente por el Lema 24. Absurdo. □

El siguiente lema se puede explicar diciendo que un conjunto consistente maximal "realiza" los conectivos $\neg$ y $\to$.

**Lema 30.** *Sea $\Gamma$ consistente maximal. Luego*

1. *para toda $\varphi$, $\neg\varphi \in \Gamma$ si y sólo si $\varphi \notin \Gamma$.*
2. *para todas $\varphi$, $\psi$, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma]$.*

*Demostración.*

1. ($\Rightarrow$) Si $\neg\varphi$ está en $\Gamma$, entonces $\varphi$ no puede puesto que sería inconsistente.

   ($\Leftarrow$) Si $\varphi$ no está, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente (por ser $\Gamma$ maximal). Por los lemas 28 y 29, $\neg\varphi \in \Gamma$.

2. ($\Rightarrow$) Supongamos $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$, veamos que se da la implicación entre corchetes. Para ello, supongamos $\varphi \in \Gamma$. Ahora, con hipótesis $(\varphi \to \psi)$ y $\varphi$ puedo derivar $\psi$ por el ejemplo 10(2). Como $\Gamma$ es cerrado por derivaciones (Lema 29), tenemos que $\psi \in \Gamma$. Obtuvimos entonces $[\varphi \in \Gamma$ implica $\psi \in \Gamma]$.

   ($\Leftarrow$) Supongamos cierta la implicación. Hacemos dos casos.

   *a*) Si $\varphi \in \Gamma$, tenemos que $\psi \in \Gamma$ por la implicación. En particular, $\Gamma \vdash \psi$, así que podemos asegurar $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$. El Lema 29 nos asegura entonces $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

   *b*) Si $\varphi \notin \Gamma$, entonces $\neg\varphi \in \Gamma$ (por lo probado anteriormente). Por el ejemplo 11 obtenemos $\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)$, y como es cerrado por derivaciones, $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

□

**Ejercicio 8.** Demostrar que los conjuntos consistentes maximales realizan la conjunción.

**Lema 31.** *Si $\Gamma$ es consistente, entonces existe una valuación $v$ tal que $v(\psi) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$.*

*Demostración.* Por el Lema 27, $\Gamma$ está contenido en algún $\Gamma^*$ maximal. Definamos: $f(p_i) := 1$ si $p_i \in \Gamma^*$ y $f(\varphi) := 0$ para toda otra $\varphi \in At$. Por el Teorema 8 (notemos que $\bot \notin \Gamma^*$), $f$ se puede extender a una valuación $[\![\cdot]\!]_f$. Veremos por inducción que $[\![\varphi]\!]_f = 1$ si y sólo si $\varphi \in \Gamma^*$.

$\boxed{\varphi \in At}$ Vale por construcción de $f$.

$\boxed{(\varphi \wedge \psi)}$

$$\begin{array}{llll} [\![(\varphi \wedge \psi)]\!]_f = 1 & \text{si y sólo si} & [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 1 & \text{por definición de valuación} \\ & \text{si y sólo si} & \varphi, \psi \in \Gamma^* & \text{por hipótesis inductiva} \\ & \text{si y sólo si} & (\varphi \wedge \psi) \in \Gamma^* & \text{por Ejercicio 8} \end{array}$$

$\boxed{(\varphi \to \psi)}$

$$\begin{array}{llll} [\![(\varphi \to \psi)]\!]_f = 0 & \text{si y sólo si} & [\![\varphi]\!]_f = 1 \text{ y } [\![\psi]\!]_f = 0 & \text{por definición de valuación} \\ & \text{si y sólo si} & \varphi \in \Gamma^* \text{ y } \psi \notin \Gamma^* & \text{por hipótesis inductiva} \\ & \text{si y sólo si} & \text{no se da: } [\varphi \in \Gamma^* \text{ implica } \psi \in \Gamma^*] & \\ & \text{si y sólo si} & (\varphi \to \psi) \notin \Gamma^* & \text{por el Lema 30} \end{array}$$

Como $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, tenemos $[\![\psi]\!]_f = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$. □

**Corolario 32.** $\Gamma \nvdash \varphi$ *implica que hay una valuación* $v$ *tal que* $v(\psi) = 1$ *para todo* $\psi \in \Gamma$ *y* $v(\varphi) = 0$.

*Demostración.*

$$\begin{array}{lll} \Gamma \nvdash \varphi & \text{implica} & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ es consistente} \qquad \text{(por el Lema 28)} \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay valuación } v \text{ tal que } v(\psi) = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \\ & \text{si y sólo si} & \text{hay valuación } v \text{ tal que } v(\psi) = 1 \text{ para toda } \psi \in \Gamma \text{ y } v(\varphi) = 0. \end{array}$$

Queda demostrada la implicación. □

*Prueba de Completitud.* Supongamos $\Gamma \models \varphi$. Luego, para toda valuación $v$ tal que $v(\psi) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$, se da $v(\varphi) = 1$. Esto equivale a decir que no hay valuación tal que $v(\psi) = 1$ para toda $\psi \in \Gamma$ y $v(\varphi) = 0$. Por la contrarrecíproca al corolario anterior, obtenemos que no se puede dar $\Gamma \nvdash \varphi$, es decir, obtenemos $\Gamma \vdash \varphi$. □

## 2.3. Más conectivos, más reglas

Por completitud funcional, es posible "definir" los restantes conectivos en términos de los del conjunto reducido $\{\wedge, \to, \bot\}$. Por ejemplo, $\neg\varphi := \varphi \to \bot$ y $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$. Pero cuando uno hace razonamientos proposicionales en la vida real, no se restringe a este conjunto de conectivos, sino que además usa $\leftrightarrow$, $\vee$, etcétera, cada uno con sus particulares reglas de inferencia. La forma en que uno deduce un $\varphi \leftrightarrow \psi$ es partir de $\varphi$ y llegar a $\psi$ y viceversa. Esto lo podríamos condensar en una regla de introducción de $\leftrightarrow$:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} [\varphi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \varphi \end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi} \leftrightarrow I.$$

Nos harían falta también reglas de eliminación. Éstas tienen la misma forma que $(\to E)$:

$$\dfrac{\varphi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\psi} \leftrightarrow E \qquad \dfrac{\psi \quad \varphi \leftrightarrow \psi}{\varphi} \leftrightarrow E.$$

Las reglas para la disyunción son las siguientes:

$$\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi} \vee I \qquad \dfrac{\begin{array}{ccc} & [\varphi] & [\psi] \\ & \vdots & \vdots \\ \varphi \vee \psi & \chi & \chi \end{array}}{\chi} \vee E.$$

Las reglas de introducción de la disyunción son muy intuitivas: una vez demostrado una fórmula, con mayor razón puedo conluir que ella u otra vale. La regla $(\vee E)$ es un modelo de *prueba por casos*: si puedo probar $\chi$ cuando $\varphi$ es cierta, y también puedo hacerlo cuando $\psi$ es cierta, entonces puedo probar $\chi$ bajo la única suposición de que alguna de las dos es cierta (i.e., que $\varphi \vee \psi$ es cierta).

Por último, ponemos dos reglas más relativas a la negación, que el lector reconocerá (de igual modo a las de $\leftrightarrow$) como abreviaciones de derivaciones ya hechas previamente:

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,\neg E \qquad \frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg I$$

La extensión de la definición formal del conjunto de derivaciones $\mathcal{D}$ se puede hacer muy fácilmente:

$(\leftrightarrow I)$ Dadas $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots D\\ \psi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\psi\\ \vdots D'\\ \varphi\end{array}$ en $\mathcal{D}$, la siguiente

$$\frac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots D\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots D'\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\leftrightarrow I,$$

es una derivación con hipótesis no canceladas las de $D$ **sin** $\varphi$ junto con las de $D'$ **sin** $\psi$.

$(\leftrightarrow E)$ Si $\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi\end{array}$, $\begin{array}{c}\vdots D_2\\ \psi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}$ son derivaciones, entonces

$$D' := \frac{\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\psi}\leftrightarrow E \qquad D'' := \frac{\begin{array}{c}\vdots D_2\\ \psi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi \leftrightarrow \psi\end{array}}{\varphi}\leftrightarrow E$$

pertenecen a $\mathcal{D}$ y sus hipótesis no canceladas son las de $D$ y $D_1$ en conjunto para la primera, y las de $D$ y $D_2$ en conjunto para la segunda. En símbolos, $Hip(D') = Hip(D) \cup Hip(D_1)$ y $Hip(D'') = Hip(D) \cup Hip(D_2)$.

$(\neg I)$ Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots D\\ \bot\end{array}$ en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots D\\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\,\neg I$, es una derivación con hipótesis no canceladas $Hip(D) \setminus \{\varphi\}$ (es decir, las mismas hipótesis de $D$ salvo eventualmente $\varphi$).

$(\neg E)$ Si tenemos derivaciones $\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\vdots D'\\ \neg\varphi\end{array}$ entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D'\\ \neg\varphi\end{array}}{\bot}\,\neg E$ pertenece a $\mathcal{D}$, y sus hipótesis no canceladas son las de $D$ y $D'$ en conjunto, $Hip(D) \cup Hip(D')$.

($\vee I$) Si $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}$ está en $\mathcal{D}$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I$ es una derivación y sus hipótesis son las misma que las de $D$. Lo mismo con $\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}$ y $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D'\\ \psi\end{array}}{\varphi\vee\psi}\vee I$.

($\vee E$) Dadas $\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array}$, $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array}$ y $\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}$ en $\mathcal{D}$, la siguiente

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\, D\\ \varphi\vee\psi\end{array}\quad\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D'\\ \chi\end{array}\quad\begin{array}{c}[\psi]\\ \vdots\, D''\\ \chi\end{array}}{\chi}\vee E,$$

es una derivación cuyo conjunto de hipótesis no canceladas es el formado por las hipótesis no canceladas de $D$, las de $D'$ **sin** $\varphi$ y las de $D''$ **sin** $\psi$.

*Nota* 2. Tener mucho cuidado cuando se aplica la regla $\leftrightarrow I$: la hipótesis $\varphi$ se cancela en la primera subderivación (es decir, $D$), *pero* **no** *en la segunda ($D'$)*. Lo mismo se aplica para $\vee E$.

Como un ejemplo de derivación usando todas las reglas introducidas, demostraremos la equivalencia clásica entre la implicación $\varphi\to\psi$ y la "implicación material", $\neg\varphi\vee\psi$.

*Ejemplo* 14. Ver que $\vdash(\varphi\to\psi)\leftrightarrow(\neg\varphi\vee\psi)$. Es natural suponer que la última regla aplicada va a ser la introducción de $\leftrightarrow$, así que de ese modo comenzamos nuestra derivación:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi\to\psi]\\ \vdots\, D_1\\ \neg\varphi\vee\psi\end{array}\qquad\begin{array}{c}[\neg\varphi\vee\psi]\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\varphi\to\psi\leftrightarrow\neg\varphi\vee\psi}\leftrightarrow I$$

El lado izquierdo necesita una aplicación de la reducción al absurdo:

$$D_1 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1\quad\boxed{\varphi\to\psi}}{\psi}\to E}{\neg\varphi\vee\psi}\vee I\qquad[\neg(\neg\varphi\vee\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1}{\neg\varphi\vee\psi}\vee I\qquad[\neg(\neg\varphi\vee\psi)]_2}{\bot}\neg E}{\neg\varphi\vee\psi}RAA_2$$

$D_1$ tiene como única hipótesis no cancelada a $\varphi\to\psi$ y $Concl(D_1)=\neg\varphi\vee\psi$, así que nos sirve

El lado derecho es el más fácil:

$$D_2 \ := \quad \cfrac{\cfrac{\boxed{\neg\varphi\vee\psi} \qquad \cfrac{\cfrac{[\neg\varphi]_3 \quad [\varphi]_4}{\bot}\,\neg E}{\psi}\,\bot \qquad [\psi]_3}{\psi}\,\vee E_3}{\varphi\to\psi}\,\to I_4$$

También $D_2$ tiene las propiedades requeridas, así que

$$\cfrac{\begin{array}{c}[\varphi\to\psi]_5\\ \vdots\, D_1\\ \neg\varphi\vee\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\neg\varphi\vee\psi]_5\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\to\psi\end{array}}{\varphi\to\psi\leftrightarrow\neg\varphi\vee\psi}\,\leftrightarrow I_5$$

es la derivación que andábamos buscando (donde cancelamos las hipótesis recuadradas).

## 2.4. Ejercicios

$\boxed{\text{Ayuda general:}}$ Releer las definiciones 1547 veces.

1. Hallar derivaciones con todas sus hipótesis canceladas que demuestren:[11]
   *a*) $\vdash \top$.
   *b*) $\vdash (\varphi\to\neg\varphi)\to\neg\varphi$.
   *c*) $\vdash [\varphi\to(\psi\to\sigma)]\leftrightarrow[\psi\to(\varphi\to\sigma)]$.
   *d*) $\vdash (\varphi\to\psi)\wedge(\varphi\to\neg\psi)\to\neg\varphi$.
   *e*) $\vdash \varphi\vee\varphi\leftrightarrow\varphi$.
   *f*) $\vdash \varphi\vee\psi\to\psi\vee\varphi$.
   *g*) $\vdash \varphi\vee\psi \ \to\ \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$.
   *h*) $\vdash \top\vee\bot$.
   *i*) $\vdash (\varphi\to\psi)\to[(\varphi\to(\psi\to\sigma))\to(\varphi\to\sigma)]$.

2. Para las derivaciones de este ejercicio es necesario utilizar la regla ($RAA$).
   *a*) $\vdash ((\varphi\to\psi)\to\varphi)\to\varphi$.
   *b*) $\vdash \varphi\leftrightarrow\neg\neg\varphi$.
   *c*) $\vdash \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\ \to\ \varphi\vee\psi$.[12]
   *d*) $\vdash (\varphi\leftrightarrow\bot)\vee(\varphi\leftrightarrow\top)$.
   *e*) $\vdash \varphi\vee\psi\leftrightarrow((\varphi\to\psi)\to\psi)$.[12]
   *f*) $\vdash (\varphi\to\psi)\vee(\psi\to\varphi)$.

3. Demostrar:
   *a*) $\varphi\vdash\neg(\neg\varphi\wedge\psi)$.
   *b*) $\{\neg(\varphi\wedge\neg\psi),\varphi\}\vdash\psi$.
   *c*) (*) $\{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)\}\vdash\varphi\vee(\psi\wedge\theta)$.[12]
   *d*) $\neg\varphi\vdash\varphi\to\psi$.
   *e*) $\{(\neg\varphi\to\psi),(\varphi\to\psi)\}\vdash\psi$.

4. Probar que $\Gamma\vdash\varphi$ implica $\Gamma\cup\Delta\vdash\varphi$, y que si tenemos $\Gamma\vdash\varphi$ y $\Delta\cup\{\varphi\}\vdash\psi$ entonces $\Gamma\cup\Delta\vdash\psi$.

5. Demostrar, transformando derivaciones cuando sea necesario:

   *a*) $\vdash\varphi$ implica $\vdash\psi\to\varphi$

   *b*) Si $\varphi\vdash\psi$ y $\neg\varphi\vdash\psi$ entonces $\vdash\psi$.

[11] Aquí, los corchetes cumplen la función de paréntesis.
[12] Resuelto en el Apéndice.

*c*) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \setminus \{\varphi\} \vdash (\varphi \to \varphi) \wedge (\varphi \to \psi)$.

*d*) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ implica $\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \vee \neg\varphi)$.

6. (*) Definir por recursión el *conjunto* de proposiciones que ocurren en una derivación $D$.

7. Decida cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

   *a*) $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$.

   *b*) $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, p_3 \to \neg p_0\}$.

   *c*) $\{p_0 \to p_1, p_0 \wedge p_2 \to p_1 \wedge p_3, p_0 \wedge p_2 \wedge p_4 \to p_1 \wedge p_3 \wedge p_5, \dots\}$ (pares implican impares. . . ).

   *d*) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{3n+1} : n \geq 0\}$.

   *e*) $\{p_{2n} : n \geq 0\} \cup \{\neg p_{4n+1} : n \geq 0\}$.

8. Probar que $\Gamma \cup \{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente si y sólo si $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ es consistente (ayuda: contrarrecíproca).

9. Demostrar que $\Gamma^+ := \{\varphi \in \mathit{PROP} : \varphi$ no contiene los conectivos "$\neg$" ni "$\bot$"$\}$ es consistente (Ayuda: construir una $v$ y probar por inducción en subfórmulas que $v(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma^+$).

10. Pruebe todo $\Gamma$ consistente maximal realiza la disyunción: para toda $\varphi, \psi$, $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ si y sólo si $[\varphi \in \Gamma$ ó $\psi \in \Gamma]$.

11. Sea $\Gamma$ consistente maximal y suponga $\{p_0, \neg(p_1 \to p_2), p_3 \vee p_2\} \subseteq \Gamma$. Decida si las siguientes proposiciones están en $\Gamma$. (Ayuda: usar Completitud, o la caracterización de consistente maximal).

    *a*) $\neg p_0$.

    *b*) $p_3$.

    *c*) $p_2 \to p_5$.

    *d*) $p_1 \vee p_6$.

12. Sea $\Gamma$ consistente y cerrado por derivaciones. ¿Es maximal?

13. Considere la relación $\Gamma \vdash^+ \varphi$, definida de igual manera que $\Gamma \vdash \varphi$ salvo que se reemplaza la regla $(\to I)$ por la siguiente:

    $(\to I^+)$ Dada $\begin{array}{c}\varphi\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}$ en $\mathcal{D}$ **tal que** $\boldsymbol{\varphi \in Hip(D)}$, tenemos que $D' := \dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \vdots\, D\\ \psi\end{array}}{\varphi \to \psi} \to I$

    es una derivación cuyas hipótesis no canceladas son las de $D$ quitando $\varphi$.

    Pruebe que $\Gamma \vdash^+ \varphi$ si y sólo si $\Gamma \vdash \varphi$.

14. *a*) (**) Demostrar que si $\vdash \varphi$, entonces existe una derivación de $\neg\neg\varphi$ con todas sus hipótesis canceladas que no utiliza la Regla del Absurdo

    *b*) (¡sin estrella!) Intentar nuevamente el ítem anterior aplicando el siguiente Teorema de *Forma Normal RAA*:

    > Para toda derivación $D$ existe una derivación $D'$ con las mismas hipótesis no canceladas y la misma conclusión, tal que $D'$ tiene **a lo sumo una** aplicación de la regla $(RAA)$, exactamente **al final**.

*c*) (*) Probar el Teorema de Forma Normal ($RAA$).[13]

*d*) Probar que todo teorema de la forma $\neg\varphi$ es *intuicionista*, es decir, que se puede demostrar sin usar ($RAA$).

15. (*) Muestre que son equivalentes:

    *a*) $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es inconsistente.

    *b*) $\vdash \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

    *c*) $\vdash \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \ \to \ \neg\varphi_1$.

    Aquí, $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\ldots (\varphi_{n-1} \wedge \varphi_n)) \ldots)$ (Ayuda: probar un resultado más general, "$\Gamma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ es inconsistente equivale a $\Gamma \vdash \ldots$", por inducción en $n$).

# 3. Reticulados y Lógica

Un libro para consultar acerca de esta sección es *Introduction to Lattices and Order*, de B. A. Davey y H. A. Priestley (Cambridge Mathematical Texts), en el capítulo 7.

Uno se preguntará ahora, ¿por qué el ínfimo de un álgebra de Boole se denota con el mismo símbolo que la conjunción ("$\wedge$")? Si la lógica corresponde a las álgebras de Boole, ¿que significan los filtros, los filtros primos?

Antes de abordar estas cuestiones, repasemos un par de ejercicios de Deducción Natural, algunos de ellos muy triviales:

## 3.1. Más Ejercicios

Probar las siguientes afirmaciones.

1. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi$.

   *b*) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \varphi$ entonces $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

   *c*) Si $\vdash \varphi \to \psi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \to \chi$.

2. *a*) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \varphi$.

   *b*) $\vdash \varphi \wedge \psi \to \psi$.

   *c*) Si $\vdash \chi \to \varphi$ y $\vdash \chi \to \psi$ entonces $\vdash \chi \to \varphi \wedge \psi$.

3. *a*) $\vdash \varphi \to \varphi \vee \psi$.

   *b*) $\vdash \psi \to \varphi \vee \psi$.

   *c*) Si $\vdash \varphi \to \chi$ y $\vdash \psi \to \chi$ entonces $\vdash \varphi \vee \psi \to \chi$.

4. *a*) $\vdash \varphi \to \top$, $\ \vdash \bot \to \varphi$.

   *b*) $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi \leftrightarrow \bot$.

   *c*) $\vdash \varphi \vee \neg\varphi \leftrightarrow \top$.

[13]Resuelto en el Apéndice.

## 3.2. *PROP* como poset

Con todos los elementos de la sección anterior, basta hacer un pequeño acto de abstracción para probar que "está todo conectado". Definamos una relación $\preccurlyeq$ en *PROP* de la siguiente manera:

$\varphi \preccurlyeq \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi \to \psi$.

Ahora bien, esta relación resulta reflexiva por el ejercicio $1a$ y transitiva por el ejercicio $1c$. No es antisimétrica, pues tenemos $(p_0 \wedge \neg p_0) \preccurlyeq \bot$ y $\bot \preccurlyeq (p_0 \wedge \neg p_0)$ y sin embargo $\bot \neq (p_0 \wedge \neg p_0)$. Lo que sí sabemos es que $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$, así que si consideráramos dos proposiciones equivalentes (es decir, que se pueda derivar la proposición que afirma "una si y solo si la otra") como idénticas, tendríamos la antisimetría.

**Definición 33.** Sea $\approx$ la relación de equivalencia dada por $\varphi \approx \psi$ si y sólo si $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Definamos $\overline{\varphi}$ como la clase de equivalencia correspondiente a $\varphi$ según la relación $\approx$.

**Ejercicio 9.** Demostrar que la relación $\approx$ es efectivamente una relación de equivalencia.

Llamaremos $\overline{PROP}$ al conjunto de clases de equivalencia de la relación $\approx$, y denotaremos $\overline{\varphi}$ a la clase de equivalencia de $\varphi$. Por ejemplo, tenemos $\overline{\bot} = \overline{p_0 \wedge \neg p_0}$ (pues $\vdash \bot \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_0$). Para verlo de una forma más simple, usamos el símbolo $\overline{\varphi}$ para poder trabajar normalmente con $\varphi$, pero se la puede reemplazar indistintamente por cualquier $\psi$ tal que $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Se puede ahora extender la definición de $\preccurlyeq$ a $\overline{PROP}$, y se hace de la manera obvia.

**Definición 34.** Diremos que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ si $\varphi \preccurlyeq \psi$.

Para ver que esta definición es *buena*, necesitamos un resultado más:

**Ejercicio 10.** Supongamos $\varphi \approx \psi$ y $\chi \approx \theta$. Entonces $\varphi \preccurlyeq \chi$ si y sólo si $\psi \preccurlyeq \theta$. (Ayuda: reemplazando $\approx$ y $\preccurlyeq$ por sus definiciones respectivas, este ejercicio pide demostrar: "Dadas dos derivaciones $D$ y $D'$ con todas sus hipótesis canceladas y conclusión $\varphi \leftrightarrow \psi$ y $\chi \leftrightarrow \theta$, probar: existe $D_1 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_1) = \emptyset$ y conclusión $\varphi \to \chi$ si y sólo si existe $D_2 \in \mathcal{D}$ con $Hip(D_2) = \emptyset$ con conclusión $\psi \to \theta$".)

Las propiedades que vimos de la relación $\preccurlyeq$ siguen valiendo si ponemos "$\overline{\cdots}$" en todos lados; decimos que $\preccurlyeq$ es *preservada* por $\approx$. Por ejemplo, por el ejercicio $1a$, tenemos:

Para toda $\varphi$, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

El ejercicio $1c$, por su parte, nos dice que $\preccurlyeq$ es transitiva:

Para todas $\varphi$, $\psi$ y $\chi$, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y , $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\chi}$ implican , $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$.

Volviendo a la antisimetría, el ejercicio $1b$ nos dice que si $\varphi \preccurlyeq \psi$ y $\psi \preccurlyeq \varphi$ obtenemos $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. Esto quiere decir que $\varphi \approx \psi$ y luego están en la misma clase de equivalencia, $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$:

Si $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y $\overline{\psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$, entonces $\overline{\varphi} = \overline{\psi}$.

En resumen: $\preccurlyeq$ define una relación de orden en *PROP*, una vez que identificamos cosas equivalentes. ¿Cómo es este poset? (o mejor, ¿para qué nos mandaron a hacer el resto de los ejercicios?).

## 3.3. El Álgebra de Lindenbaum

Traduciendo los ejercicios restantes, obtenemos lo siguiente. Los ejercicios $2a$ y $2b$ nos dicen que la conjunción de dos proposiciones es una cota inferior de las mismas:

Para todas $\varphi, \psi$, $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\varphi \wedge \psi} \preccurlyeq \overline{\psi}$,

y el ejercicio $2c$ dice que es mayor o igual que cualquier cota:

Si $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi}$ y $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\psi}$, entonces $\overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\varphi \wedge \psi}$.

Juntando todo, tenemos que efectivamente $\overline{\varphi \wedge \psi}$ es el ínfimo entre $\overline{\varphi}$ y $\overline{\psi}$ en $\overline{PROP}$. Con esto hemos demostrado que es lícito escribir $\overline{\varphi \wedge \psi} = \overline{\varphi} \wedge \overline{\psi}$.

Por otro lado, traduciendo correspondientemente los ejercicios 3 deducimos que $\vee$ nos fabrica el supremo, y se puede ver que distribuye con el ínfimo:

**Ejercicio 11.** Probar que efectivamente $\vee$ distribuye con $\wedge$ en $\overline{PROP}$

Por último, viendo los ejercicios $4a$, $4b$ y $4c$ obtenemos las siguientes propiedades:

Para toda $\varphi$, $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\top}$ y $\overline{\bot} \preccurlyeq \overline{\varphi}$.

$\overline{\varphi} \wedge \overline{\neg\varphi} = \overline{\bot}$, $\overline{\varphi} \vee \overline{\neg\varphi} = \overline{\top}$.

Es decir, $\overline{\top}$ y $\overline{\bot}$ son respectivamente los elementos máximo y mínimo de $\overline{PROP}$, y $\overline{\neg\varphi}$ cumple el rol de complemento. En suma, no sólo $\overline{PROP}$ es un poset, sino que también es un álgebra de Boole $\langle \overline{PROP}, \wedge, \vee, \neg, \overline{\bot}, \overline{\top} \rangle$, que se llama *álgebra de Lindenbaum*.

Pero las "coincidencias" no terminan aquí. Definamos $\overline{\Gamma} := \{\overline{\varphi} : \varphi \in \Gamma\}$.

**Lema 35.** *$\Gamma$ es inconsistente si y sólo si hay elementos de $\overline{\Gamma}$ cuyo ínfimo (en $\overline{PROP}$) es $\overline{\bot}$.*

*Demostración.* ($\Rightarrow$) Como $\Gamma$ es inconsistente, tenemos una derivación $D$ con $Hip(D) = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Gamma$ y $Concl(D) = \bot$. Pero entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \bot$, y esto es lo mismo que $\vdash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \ \rightarrow\ \bot$. Además sabemos (por la regla ($\bot$)) que $\vdash \bot \ \rightarrow\ \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, así que tenemos en resumen $\overline{\bot} = \overline{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que hay $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma$ tales que $\overline{\bot} = \overline{\varphi}_1 \wedge \ldots \wedge \overline{\varphi}_n$. Entonces sabemos que $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \leftrightarrow \bot$, y en particular $\vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \rightarrow \bot$ (usando la regla ($\wedge E$) o ($\leftrightarrow E$) según consideremos a $\leftrightarrow$ como una definición o un nuevo conectivo, respectivamente). Entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \bot$, y en consecuencia $\Gamma \vdash \bot$. $\square$

Otro resultado es el siguiente:

**Lema 36.** *Si $\Gamma$ es cerrado por derivaciones entonces $\overline{\Gamma}$ es un filtro en $\overline{PROP}$.*

*Demostración.* Supongamos que $\Gamma$ es cerrado por derivaciones. Para ver que $\overline{\Gamma}$ es un filtro, basta ver que

- Si $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$ entonces $\overline{\varphi} \wedge \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$.
- $\overline{\Gamma}$ es creciente. Es decir, si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ y $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$ entonces $\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}$.

Necesitaremos una cuentita auxiliar.

**Afirmación.** *Supongamos $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$. Si $\Gamma$ es cerrado por derivaciones, entonces $\varphi \in \Gamma$.*

*Prueba de la Afirmación.* Si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$, existe $\chi \in \Gamma$ tal que $\overline{\chi} = \overline{\varphi}$. Es decir, hay una derivación $D$ con conclusión $\chi \leftrightarrow \varphi$ y todas sus hipótesis canceladas. Luego,

$$\dfrac{\chi \quad \dfrac{\dfrac{\vdots\, D}{\chi \leftrightarrow \varphi}}{\chi \to \varphi}\wedge E}{\varphi} \to E$$

es una derivación con única hipótesis no cancelada $\chi$ (que está en $\Gamma$) y conclusión $\varphi$, así que $\Gamma \vdash \varphi$ y como es cerrado por derivaciones, $\varphi \in \Gamma$. □

Supongamos ahora que $\overline{\varphi}, \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$. Por la Afirmación sabemos que $\varphi, \psi \in \Gamma$; entonces hay una derivación con hipótesis en $\Gamma$ y conclusión $\varphi \wedge \psi$ (por la regla $(\wedge I)$). Entonces $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi$ y luego $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$, con lo que probamos la primera parte

Para la segunda condición de filtro, supongamos $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ y $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi}$. Por la Afirmación y puesto que $\approx$ preserva $\preccurlyeq$, puedo eliminar las barras y obtenemos $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi \preccurlyeq \chi$, donde esta última equivale a $\vdash \varphi \to \chi$. Pero entonces $\{\varphi\} \vdash \chi$ y luego $\Gamma \vdash \chi$ pues $\varphi$ pertenecía a $\Gamma$. Nuevamente, como $\Gamma$ es cerrado por derivaciones, $\chi \in \Gamma$ y luego $\overline{\chi} \in \overline{\Gamma}$. □

La vuelta del lema no es cierta así como está, pero vale si se reemplaza la segunda condición por una más fuerte. Diremos que $\Gamma$ es *cerrado por* $\approx$ si $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi \approx \psi$ entonces $\psi \in \Gamma$.

**Ejercicio 12.** Probar que si $\overline{\Gamma}$ es un filtro y $\Gamma$ es cerrado por $\approx$ entonces $\Gamma$ es cerrada por derivaciones.

**Corolario 37.** *Si* $\Gamma$ *es cerrado por derivaciones y consistente, entonces es un filtro propio.*

*Demostración.* Ejercicio (ayuda: un filtro es propio si no contiene al elemento mínimo). □

Como golpe de gracia, obtenemos

**Lema 38.** $\Gamma$ *es consistente maximal implica* $\overline{\Gamma}$ *es un filtro primo.*

*Demostración.* Supongamos $\Gamma$ es consistente maximal. Como $\Gamma$ es cerrado por derivaciones y consistente, ya sabemos que es un filtro propio. Para ver que es primo, basta probar que para todo $\overline{\varphi}, \overline{\psi}$ en $\overline{PROP}$, $\overline{\varphi} \vee \overline{\psi} \in \overline{\Gamma}$ si y sólo si $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ ó $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$. Pero esto último es inmediato por el ejercicio 10 de la sección 2.4. □

**Teorema 39.** *Suponga que* $\Gamma$ *es cerrado por* $\approx$. *Luego* $\Gamma$ *es consistente maximal si y sólo si* $\overline{\Gamma}$ *es un filtro primo.*

*Demostración.* Queda como ejercicio. □

## 3.4. Algunos Comentarios

El álgebra de Lindenbaum que definimos está basada exclusivamente en nociones sintácticas. Podemos definir otra álgebra usando la relación $\sqsubseteq$ dada por: $\varphi \sqsubseteq \psi$ si y sólo si $\models \varphi \to \psi$, que correspondería a las nociones semánticas. Se puede dar una nueva prueba de la completitud de la lógica proposicional usando estas dos álgebras, que resultan ser isomorfas, y en las que los filtros primos son la realidad subyacente a conjuntos consistentes maximales (por el lado sintáctico) y valuaciones (por el lado semántico). Estas ideas se generalizan a la lógica de primer orden, que incorpora los cuantificadores $\exists$ y $\forall$.

## 3.5. Ejercicios

1. Supongamos $\varphi \approx \psi$ y $\chi \approx \theta$. Entonces $\varphi \wedge \chi \approx \psi \wedge \theta$.

2. Encontrar $\Gamma$ y $\varphi$ tales que $\overline{\varphi} \in \overline{\Gamma}$ pero $\varphi \notin \Gamma$.

3. ¿Son los elementos de $\overline{At}$ átomos del álgebra de Boole $\overline{PROP}$?

4. *a*) Sea $h : \overline{PROP} \to \mathbf{2}$ un homomorfismo. Probar que la función $v : PROP \to \{0, 1\}$ definida como $v(\varphi) := h(\overline{\varphi})$ es una valuación.

   *b*) Probar que toda valuación se obtiene de esa manera.

5. *a*) Sean $\varphi, \psi \in PROP$ tales que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ pero $\overline{\varphi} \neq \overline{\psi}$. Demostrar que si $p$ es un átomo que no ocurre en $\varphi$ ni en $\psi$, entonces $\nvdash \varphi \vee (p \wedge \psi) \to \varphi$ y $\nvdash \psi \to \varphi \vee (p \wedge \psi)$. (Ayuda: usar Completitud).

   *b*) Probar que $\overline{PROP}$ es densa, es decir, si $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\psi}$ y $\overline{\varphi} \neq \overline{\psi}$ entonces existe $\overline{\chi} \in \overline{PROP}$ distinta de las anteriores tal que $\overline{\varphi} \preccurlyeq \overline{\chi} \preccurlyeq \overline{\psi}$.

6. ¿Existen átomos en $\overline{PROP}$?

# 4. Axiomatización[14]

Estudiaremos un par (de dos o más) de conceptos relacionados con la axiomatización de teorías (proposicionales, en nuestro caso).

**Definición 40.** Una *teoría* será un subconjunto de $PROP$.

La tarea del hombre de ciencia en general consiste en analizar y organizar el conjunto "total" de afirmaciones sobre el Mundo (una pequeña fracción de ellas podría ser la que se halla antes del ejemplo 3). Considerando a una valuación $v$ como un "mundo posible", la teoría relacionada con ese mundo es el conjunto consistente maximal $\Gamma_v := \{\varphi : v(\varphi) = 1\}$. Para poder estudiar dicha teoría, conviene "simplificarla" para hacerla más manejable. Por ejemplo, sabemos que si $\varphi$ y $\psi$ están en $\Gamma_v$, entonces $\varphi \wedge \psi$ está; así que para "entender" a $\Gamma_v$ tener a $\varphi$, $\psi$ y a $\varphi \wedge \psi$ es redundante, ya que sabemos que una vez que tenemos a las dos primeras podemos deducir la tercera. Sería de interés encontrar un conjunto de proposiciones de las que se pueda deducir lo mismo que se puede deducir de $\Gamma_v$, pero que sea más resumido. Las siguientes definiciones capturan algunos de dichos conceptos.

**Definición 41.**
1. $\Gamma$ es *independiente* si y sólo si para toda $\varphi \in \Gamma$, $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$.

2. $\varphi$ es *indecidible para* $\Gamma$ si $\Gamma \nvdash \varphi$ ni $\Gamma \nvdash \neg\varphi$.

3. Sea $\Gamma$ una teoría. Una teoría $\Delta$ es un conjunto de *axiomas para* (o que *es equivalente a*) $\Gamma$, si para toda $\varphi \in PROP$ se da $[\Gamma \vdash \varphi$ si y sólo si $\Delta \vdash \varphi]$.

**Proposición 42.** *Si para toda $\varphi \in \Gamma$, $\varphi$ es indecidible para $\Gamma \setminus \{\varphi\}$, entonces $\Gamma$ es independiente.*

*Demostración.* Estamos diciendo en las hipótesis que para toda $\varphi$ se dan $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$ y $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \neg\varphi$. En particular, podemos afirmar "para toda $\varphi$, $\Gamma \setminus \{\varphi\} \nvdash \varphi$", que es lo mismo que dice la Definición 41. $\square$

[14] Bonus Track.

Damos seguidamente un criterio para decidir si una proposición es indecidible para una teoría.

**Lema 43.** *Si hay valuaciones $v_0, v_1$ de $\Gamma$ tales que $v_0(\varphi) = 0$, $v_1(\varphi) = 1$, entonces $\varphi$ es indecidible para $\Gamma$.*

*Demostración.* Probamos la contrarrecíproca, es decir, supongamos que $\varphi$ es decidible para $\Gamma$. Como primer caso, supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$. Por la Corrección de la lógica proposicional, tenemos que $\Gamma \models \varphi$ y por ende toda valuación de $\Gamma$ valúa $\varphi$ en 1, así que no se puede dar el antecedente. En segundo caso, si $\Gamma \vdash \neg\varphi$, tenemos $\Gamma \models \neg\varphi$ y luego toda valuación $v$ de $\Gamma$ hace $v(\neg\varphi) = 1$, y por definición de valuación, $v(\varphi) = 0$, cosa que también contradice el antecedente. □

Otra propiedad interesante del conjunto $\Gamma_v$ es la siguiente consecuencia del ejemplo 13 y el Lema 30: para toda $\varphi$, $\Gamma_v \vdash \varphi$ ó $\Gamma_v \vdash \neg\varphi$. Es decir, $\Gamma_v$ "decide" cualquier proposición: una vez que supusimos $\Gamma_v$, la verdad o falsedad de cada $\varphi$ (en términos de derivabilidad) queda determinada.

**Definición 44.** Una teoría $\Gamma$ es *completa* si y sólo si para toda $\varphi \in PROP$, $\Gamma \vdash \varphi$ ó $\Gamma \vdash \neg\varphi$.

En la terminología de la Definición 41, una teoría es completa si no hay proposición indecidible para ella. Nuestros primeros ejemplos de conjuntos completos son los obvios.

*Ejemplo* 15.

1. $\{\bot\}$ es completo.

   Queda como ejercicio fácil (ver el Lema 24);

2. Si $\Gamma$ es consistente maximal, entonces es completo.

   Una aplicación trivial del Lema 30.

*Ejemplo* 16. (Uno no tan obvio). El conjunto $\Pi := \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ es completo (y consistente). Sea $\varphi \in PROP$ y supongamos que $\Pi \nvdash \varphi$. Entonces por Completitud de la lógica proposicional, $\Pi \not\models \varphi$ y en consecuencia hay una valuación $v$ de $\Pi$ tal que $v(\varphi) = 0$, es decir, $v(\neg\varphi) = 1$. Por otro lado, si $v_1$ y $v_2$ son valuaciones de $\Pi$, entonces $v_1(p_i) = v_2(p_i) = 1$ para todo $p_i$, así que coinciden en $At$ y en consecuencia son iguales, $v_1 = v_2$. Como hay una única valuación de $\Pi$, entonces decir "hay una valuación $v$ de $\Pi$ tal que $v(\neg\varphi) = 1$" es lo mismo que decir "para toda valuación $v$ de $\Pi$, $v(\neg\varphi) = 1$" y esto último equivale a $\Pi \models \neg\varphi$. Usando completitud nuevamente, obtenemos $\Pi \vdash \neg\varphi$.

Las teorías completas y consistentes son muy especiales, ya que para ellas el Lema 27 vale en una forma mucho más fuerte.

**Teorema 45.** *$\Gamma$ es consistente y completa si y sólo si existe un único $\Gamma^*$ consistente maximal que lo contiene.*

*Demostración.* Probaremos que las respectivas negaciones son equivalentes.

($\Rightarrow$) Sabemos que hay por lo menos un consistente maximal que lo contiene. Supongamos que hubiera dos distintos $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$. Sabemos que hay una $\varphi \in \Gamma_1 \setminus \Gamma_2$,

**Ejercicio 13.** ¿Por qué?

así que en particular $\varphi \notin \Gamma_2$, y por el Lema 30, $\neg\varphi \in \Gamma_2$. Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ sería inconsistente, y por ende $\Gamma_2$ lo sería (pues $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Gamma_2$), absurdo. Si $\Gamma \vdash \neg\varphi$, $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sería inconsistente, y por ende $\Gamma_1$ también, otro absurdo. Luego $\Gamma$ no puede ser completo.

($\Leftarrow$) Supongamos que $\Gamma$ es incompleto y entonces hay una $\varphi$ tal que $\Gamma \nvdash \varphi$ y $\Gamma \nvdash \neg\varphi$. Por las contrarrecíprocas al Lema 28, tenemos que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ y $\Gamma \cup \{\varphi\}$ deben ser consistentes, así que por el Lema 27 deben haber conjuntos consistentes maximales que contengan a cada uno. Pero no pueden ser iguales ya que en uno está $\neg\varphi$ y en el otro está $\varphi$ (y ambas no pueden pertenecer simultáneamente a un conjunto consistente). □

Este teorema refleja en alguna medida una de las características que deseábamos cumpla nuestro "resumen" de las verdades de un mundo posible: si nuestro conjunto reducido de afirmaciones es completo, determina totalmente el conjunto total de afirmaciones.

Por último enunciamos sin prueba un teorema sobre conjuntos independientes de axiomas.

**Teorema 46.** *Toda teoría admite un conjunto independiente de axiomas.*

*Ejemplo* 17. Para el conjunto $\{(p_0 \wedge p_1), (p_3 \to p_1), (p_1 \vee p_2)\}$, un conjunto de axiomas independientes es $\{p_0, p_1\}$. Otro posible es $\{p_0 \wedge p_1\}$.

Resumiendo esta sección: para cada "mundo posible" (léase, valuación) su teoría es completa y se puede elegir un conjunto de axiomas sin redundancia (léase, independiente) para ella.

*Ejemplo* 18. El conjunto $\Pi$ del ejemplo 16 es (además de completo y consistente) independiente. Pues para cada $n$, la función $f : At \to \{0, 1\}$ definida de la siguiente manera

$$f(\varphi) := \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi = p_n, \bot \\ 1 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

se puede extender a una valuación $v$ de $\Pi \setminus \{p_n\}$ tal que $v(p_n) = 0$, así que $\Pi \setminus \{p_n\} \not\models p_n$, y por Corrección, $\Pi \setminus \{p_n\} \nvdash p_n$.

## 4.1. Ejercicios

1. Mostrar que $p_1 \to p_2$ es indecidible para $\{p_1 \leftrightarrow p_0 \wedge \neg p_2, p_2 \to p_1\}$.

2. Hallar conjuntos independientes que sean equivalentes a los siguientes

   *a*) $\{p_0, p_1 \vee p_3, p_4\}$.
   *b*) $\{p_1,\ (p_1 \wedge p_2 \to p_3)\ ,\ (p_1 \to p_2)\}$.
   *c*) $\{p_1,\ (p_1 \wedge p_2 \to p_3)\ , p_3\}$.
   *d*) $\{(p_1 \to p_3), (p_1 \wedge p_2 \to \neg p_3), p_2\}$.
   *e*) $\{p_1, (p_1 \wedge p_2), (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3), \dots\}$.

3. Hallar dos ejemplos de conjuntos independientes, consistentes y completos (Ayuda: usar el ejemplo 16). Justificar.

# A. Apéndice: Algunos ejercicios (difíciles) resueltos

**Teorema 47** (Forma Normal $(RAA)$)**.** *Para toda derivación $D$ existe una derivación $D'$ con las mismas hipótesis no canceladas y la misma conclusión, tal que $D'$ tiene* a lo sumo una *aplicación de la regla* $(RAA)$*, exactamente* al final.

*Demostración.* En primer lugar, para cualquier $D$ que no incluya la regla $(RAA)$ podemos tomar simplemente $D' := D$. Eliminado este caso trivial, vamos a probar por inducción en derivaciones que siempre podemos obtener una $D'$ con *exactamente* una aplicación de dicha regla, al final de $D'$. Para aplicar el razonamiento inductivo, dividiremos en casos de acuerdo a cuál es la última regla de inferencia que se utiliza en $D$.

$(PROP)$ Si $D = \varphi$ tomo como $D'$ la siguiente derivación: $\dfrac{\dfrac{\varphi \quad [\neg\varphi]_1}{\bot}\,\neg E}{\varphi}\,RAA_1$.

$(\wedge I)$ Supongamos que la derivación es de la forma $\dfrac{\begin{array}{c}\vdots D_1\\ \varphi\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots D_2\\ \psi\end{array}}{\varphi\wedge\psi}\,\wedge I$ ; por hipótesis inductiva sabemos que hay derivaciones en forma normal $(RAA)$ de $\varphi$ y $\psi$, es decir, derivaciones

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]\\ \vdots D_3\\ \bot\end{array}}{\varphi}\,RAA \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\neg\psi]\\ \vdots D_4\\ \bot\end{array}}{\psi}\,RAA$$

que satisfacen la conclusión del teorema. Es decir, $D_3$ y $D_4$ no utilizan la regla $(RAA)$. Usaremos estas derivaciones para conseguir la que buscamos.

Comenzaremos reemplazando cada ocurrencia de $\neg\varphi$ como una hipótesis no cancelada de $D_3$ por la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1\psi}{\varphi\wedge\psi}\,\wedge I \qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\,\neg E}{\neg\varphi}\,\neg I_1$$

De esta manera obtenemos una derivación:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1\psi}{\varphi\wedge\psi}\,\wedge I \qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\,\neg E}{\neg\varphi}\,\neg I_1\\ \vdots D_3\\ \bot\end{array} \qquad \text{y luego} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1[\psi]_2}{\varphi\wedge\psi}\,\wedge I \qquad \neg(\varphi\wedge\psi)}{\bot}\,\neg E}{\neg\varphi}\,\neg I_1\\ \vdots D_3\\ \bot\end{array}}{\neg\psi}\,\neg I_2$$

Reemplazamos ahora cada ocurrencia de $\neg\psi$ como una hipótesis no cancelada de $D_4$ por la segunda derivación y obtenemos una derivación de $\varphi \wedge \psi$ que tiene una única aplicación de $(RAA)$, exactamente al final:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_1[\psi]_2}{\varphi\wedge\psi}\wedge I \qquad [\neg(\varphi\wedge\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\neg\varphi}\neg I_1 \\ \vdots\, D_3 \\ \dfrac{\bot}{\neg\psi}\neg I_2 \\ \vdots\, D_4 \\ \dfrac{\bot}{\varphi\wedge\psi} RAA_3 \end{array}$$

$(\wedge E)$ Hacemos el mismo procedimiento; el esquema general que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{array}{c} \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi\wedge\psi]_1}{\varphi}\wedge E \qquad [\neg\varphi]_2}{\bot}\neg E}{\neg(\varphi\wedge\psi)}\neg I_1 \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{\varphi} RAA_2 \end{array}$$

$(\rightarrow I)$ Es análogo a los anteriores, con una salvedad: partimos de una derivación de la forma $\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots\, D_1 \\ \dfrac{\psi}{\varphi\rightarrow\psi}\rightarrow I \end{array}$ y por hipótesis inductiva sabemos que hay una derivación en forma normal $(RAA)$ de $\psi$ *con la hipótesis adicional* $\varphi$:

$$\begin{array}{c} [\neg\psi] \quad \varphi \\ \vdots\, D \\ \dfrac{\bot}{\psi} RAA \end{array}$$

Usamos esta $D$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\psi]_1}{\varphi\to\psi}\to I \qquad [\neg(\varphi\to\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\neg\psi}\neg I_1 \qquad [\varphi]_2 \\ \vdots\, D \\ \bot\end{array}}{\psi}\bot}{\varphi\to\psi}\to I_2 \qquad [\neg(\varphi\to\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\varphi\to\psi}RAA_3$$

Los otros casos quedan como ejercicio (ahora fácil). $\square$

**Ejercicio.** Probar $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)\ \to\ \varphi \vee \psi$.

*Demostración.*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\varphi]_1 \quad [\neg\psi]_2}{\neg\varphi\wedge\neg\psi}\wedge I \qquad [\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)]_4}{\bot}\neg E}{\varphi}RAA_1}{\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\psi}RAA_2}{\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_3}{\bot}\neg E}{\varphi\vee\psi}RAA_3}{\neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)\ \to\ \varphi\vee\psi}\to I_4$$

$\square$

**Ejercicio.** Probar $\vdash \varphi \vee \psi\ \leftrightarrow\ ((\varphi \to \psi) \to \psi)$.

*Demostración.* La derivación buscada es

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi\vee\psi]\\ \vdots\, D_1 \\ (\varphi\to\psi)\to\psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[(\varphi\to\psi)\to\psi]\\ \vdots\, D_2\\ \varphi\vee\psi\end{array}}{\varphi\vee\psi\ \leftrightarrow\ ((\varphi\to\psi)\to\psi)}\leftrightarrow I$$

donde $D_1$ y $D_2$ vienen dadas por:

$$D_1 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\varphi\vee\psi \qquad \dfrac{[\varphi]_2[\varphi\to\psi]_1}{\psi}\to E \qquad [\psi]_2}{\psi}\vee E_2}{(\varphi\to\psi)\to\psi}\to I_1$$

$$D_2 \;:=\; \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi]_3}{\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_4}{\bot}\neg E}{\psi}\bot}{\varphi\to\psi}\to I_3 \qquad (\varphi\to\psi)\to\psi}{\psi}\to E}{\varphi\vee\psi}\vee I \qquad [\neg(\varphi\vee\psi)]_4}{\bot}\neg E}{\varphi\vee\psi}RAA_4$$

$\square$

**Ejercicio.** Probar $\{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)\}\vdash\varphi\vee(\psi\wedge\theta)$.

*Demostración.*

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\psi}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi]_1}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{(\varphi\vee\psi)\wedge(\varphi\vee\theta)}{\varphi\vee\theta}\wedge E \qquad \dfrac{[\varphi]_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I \qquad \dfrac{\dfrac{[\psi]_1[\theta]_2}{\psi\wedge\theta}\wedge I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee I}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_2}{\varphi\vee(\psi\wedge\theta)}\vee E_1$$

$\square$

# Índice alfabético