Conjunteoría

Pedro Sánchez Terraf[*]

11 de marzo de 2022

Parte de estas notas pretenden llenar algunos huecos (desde el punto de vista de un estudiante) de los capítulos iniciales del nuevo libro “Set Theory” de Kenneth Kunen, para facilitar la lectura. También hay una pequeña introducción al Axioma de Martin y a los subconjuntos cerrados y no acotados de cardinales regulares.

Una versión preliminar de este apunte sirvió de complemento a las clases que di en la UNC durante la primera mitad de 2016.

Índice

[*]Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM-FaMAF). Córdoba. Argentina.

0. Preliminares

Para el desarrollo del contenido que sigue, es conveniente tener manejo de las nociones elementales de matemática discreta (por ejemplo, ver [1, Secc. 1.3]. Entre ellas, las definiciones básicas de relaciones, funciones, tipos de relaciones binarias, ***posets*** (conjuntos parcialmente ordenados), órdenes totales e isomorfismo de posets.

Definición 0.1. Sea A un conjunto y R una relación binaria sobre A. R es ***bien fundada*** si todo subconjunto no vacío X de A tiene elemento R-***minimal***:

$$\forall X \subseteq A(X \neq \varnothing \to \exists m \in X \, \forall x \in X(x \not R\, m)).$$

En general, suponemos también en estas notas familiaridad con las definiciones iniciales del libro de Kunen [7], especialmente desde I.4 a I.7.11 inclusive. En particular, es conveniente tener algún conocimiento de

1. qué es una fórmula en la lógica de primer orden ([7, Secc. I.2] o bien [1, Secc. 1.2]; para una discusión informal de este tema, pueden referirse a la página de blog `http://p.sanchezterraf.com.ar/?p=272`), y
2. cuáles son los axiomas de ZFC,

que detallamos por completitud a continuación.

0.1. Los Axiomas de ZFC

Las siguientes son abreviaturas de las oraciones de primer orden que forman el conjunto de axiomas ZFC.

- *Existencia.* Existe al menos un conjunto.

$$\exists x : x = x.$$

- *Extensionalidad.* Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

$$\forall x, y : x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

- *Fundación (Regularidad).* La relación $\in$ es bien fundada en el universo de conjuntos.

$$\forall x \, (x \neq \varnothing \to \exists y \in x : \forall z \in x(z \notin y)).$$

- *Pares.* Dados x e y, existe un conjunto que contiene (como elementos) a ambos.

$$\forall x, y \exists c : x \in c \wedge y \in c.$$

- *Unión.* Dado un conjunto x, hay un conjunto que incluye a la unión $\bigcup x$ de todos los conjuntos que pertenecen a x.

$$\forall x \exists u : \forall y \in x \forall z \in y (z \in u).$$

- *Conjunto Potencia o de Partes.* Dado un conjunto x, existe un conjunto que contiene a todos los subconjuntos de x.

$$\forall x \exists p : \forall y \big(\forall z \in y (z \in x) \to y \in p \big).$$

- *Separación (Comprensión).* Para todo x, parámetros $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$ y toda "propiedad" $\varphi(y, \bar{x})$, existe el subconjunto de x formado por los y que cumplen con dicha propiedad. Es decir, para toda fórmula de primer orden $\varphi(y, \bar{x})$ que no tenga a s como variable libre, el siguiente es un axioma:

$$\forall x \forall \bar{x} \exists s : \forall y (y \in s \leftrightarrow \varphi(y, \bar{x}) \wedge y \in x).$$

- *Infinito.* Existe un conjunto inductivo.

$$\exists x : \varnothing \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x).$$

- *Reemplazo.* Para cada "función definible" con parámetros $\bar{x}$ (con gráfico $\psi(\cdot, \cdot, \bar{x})$), la imagen de un conjunto por esa función está incluida en un conjunto. Es decir, para toda fórmula $\psi(\cdot, \cdot, \bar{x})$ que no tenga a r como variable libre, el siguiente es un axioma:

$$\forall x, \bar{x} : \big(\forall y \in x \exists! z : \psi(y, z, \bar{x}) \big) \to \exists r : \forall y \in x \exists z \big(\psi(y, z, \bar{x}) \wedge z \in r \big).$$

- *Elección (AC).* Para todo conjunto x de conjuntos disjuntos no vacíos, existe un conjunto que corta a cada uno en exactamente un punto.

$$\forall x \Big(\big(\forall y, w \in x : y \neq \varnothing \wedge \neg \exists t : t \in y \wedge t \in w \big) \to \exists c : \forall y \in x \big(\exists! z (z \in y \wedge z \in c) \big) \Big).$$

Para obtener las oraciones de primer orden que forman la teoría *ZFC*, hay que reemplazar algunas expresiones por su definición. En primer lugar toda referencia al conjunto vacío $\varnothing$ de la forma $\varphi(\varnothing)$[1] debe reemplazarse por

$$\exists v \, (\neg \exists u \, (u \in v) \wedge \varphi(v)).$$

Sin embargo, esto se puede simplificar en algunos casos, por ejemplo, para la expresión "$y \neq \varnothing$" en el Axioma de Elección correspondería

$$\neg \big(\exists v \, (\neg \exists u \, (u \in v) \wedge y = v) \big),$$

aunque en presencia de los otros axiomas basta con escribir $\exists u \, (u \in y)$.

[1] Con φ una fórmula *atómica*.

En el Axioma de Infinito debe reemplazarse "$y \cup \{y\} \in x$" por la fórmula

$$\exists w \left(\forall t \, (t \in w \leftrightarrow t = y \vee t \in y) \wedge w \in x\right).$$

Como último detalle técnico, las cuantificaciones "relativas" de la forma $\forall x \in y \, \varphi(x)$ se pueden escribir usando los cuantificadores estándares: $\forall x \, (x \in y \to \varphi(x))$, y el $\exists!$ también se puede expresar usando sólo $\forall$ y $\exists$:

$$\exists! z \, \varphi(z) := \exists z : \varphi(z) \wedge \forall z' (\varphi(z') \to z' = z).$$

Dado un conjunto de axiomas B, usaremos B^- para B sin Fundación, $B - P$ para B sin el Axioma de Partes, y BC denotará B junto a AC. ZF son todos los axiomas menos AC y Z son todos los axiomas menos AC y Reemplazo.

Advertencia. Es extremadamente frecuente el uso de la notación "supra $-$" para indicar la *ausencia del axioma de partes*. De manera que si la persona lectora se encuentra con ZF^- ó ZFC^- en la calle, probablemente se refieran a lo que aquí nombramos como $ZF - P$ y $ZFC - P$, respectivamente.

Finalmente, agrego unas palabras relativas a título de estas notas. Originalmente llamadas "Apunte de Teoría de Conjuntos", mutaron a la contracción ***Conjunteoría*** que se acerca muchísimo más al "Set Theory" anglosajón y también al original "Mengenlehre" en el alemán de Cantor. El neologismo también fue inspirado decisivamente por reuniones informales con estudiantes de grado de la Universidad Nacional de Córdoba para discutir problemas elementales de ésta área durante 2017, que atinadamente fueron bautizadas *Conjuntadas* por Felipe E. González.

0.2. Ejercicios

Los ejercicios de esta sección cumple un rol "nivelador"; salvo los marcados con una estrella (*), deberían ser accesibles para los lectores que quieran abordar este material. En la mayoría de los casos, estos "ejercicios estrella" serán considerados como algo optativo.

x0.1. Sea $(x,y) = \langle x,y \rangle := \{\{x\},\{x,y\}\}$. Demostrar que

$$(x,y) = (z,w) \quad \text{si y sólo si} \quad x = z \text{ y } y = w. \tag{1}$$

x0.2. Escribir una fórmula de primer orden $\varphi(x,y,z)$ en el lenguaje $\{\in\}$ tal que

$$\varphi(a,b,c) \quad \text{si y sólo si} \quad c = (a,b).$$

x0.3. (*) La definición de par ordenado $\langle\langle x,y \rangle\rangle := \{x,\{x,y\}\}$ no es buena. Pensar cómo podría fallar. (No se puede probar sin Fundación que cumpla con la condición (1)).

Los siguientes ejercicios explotan la idea de *diagonalización*. El primero da una manera uniforme de elegir algo fuera de un conjunto.

x0.4. Sea $r(X) := \{x \in X : x \notin x\}$ (r por "Russell"). Probar que para todo X, $r(X) \notin X$. (Ayuda: ¿$r(X) \in r(X)$?).

x0.5. Probar que la *clase* V de todos los conjuntos no es un conjunto ($r(V)$ sería un conjunto).

x0.6. (Cantor) Probar que no hay suryección de X en $\mathscr{P}(X)$. (Ayuda: habría un b tal que $f(b) = \{x \in X : x \notin f(x)\}$).

Diremos $x \leqslant_c y$ ó $|x| \leq |y|$ (respectivamente, $x =_c y$, $x \approx y$ ó $|x| = |y|$) si hay una inyección (biyección) de x en y, y escribiremos $x <_c y$ ó $|x| < |y|$ si $x \leqslant_c y$ y $x \neq_c y$. Como es usual, usaremos $y \geqslant_c x$ y $y >_c x$ similarmente. Un conjunto x es ***contable*** si $x \leqslant_c \mathbb{N}$, e ***incontable*** en caso contrario.

Denotaremos ${}^{A}B$ al conjunto de las funciones de A en B y $A!$ al conjunto de las biyecciones de A en A. Cuando definamos cardinales, escribiremos $|B|^{|A|}$ para el cardinal de ${}^{A}B$ y tendremos una notación más aritmética (pero menos mnemotécnica). Por último, definimos

$$0 := \varnothing, \qquad 1 := \{0\}, \qquad 2 := \{0,1\}. \tag{2}$$

x0.7. Para todo X, $X <_c \mathscr{P}(X) =_c {}^{X}2$.

x0.8. Probar que si $B \cap C = \varnothing$, ${}^{B\cup C}A =_c {}^{B}A \times {}^{C}A$. Además ${}^{C}\left({}^{B}A\right) =_c {}^{C\times B}A$.

x0.9. (*) Sea $A = \mathbb{N}$ ó $\mathbb{R}$. Probar que $\mathscr{P}(A) \leqslant_c A! \cup A$. (Esto vale en general para todo A).

x0.10. Supongamos que para cada $A \in \mathscr{A}$ existe $B \in \mathscr{A}$ tal que $A <_c B$. Probar que para todo $A \in \mathscr{A}$, $A <_c \bigcup \mathscr{A}$.

x0.11. (*) Sea I un conjunto arbitrario y para cada $i \in I$, sean $x_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$. Definimos $\sum_{i\in I} x_i$ como:

$$\sum_{i\in I} x_i := \sup\left\{\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} : i_k \in I,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Probar que si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$, entonces $x_i = 0$ salvo para un conjunto contable de índices i. (Ayuda: unión contable de conjuntos contables es contable).

Es importante notar que la ayuda del ejercicio anterior depende del Axioma de Elección.

x0.12. (*) Demostrar que hay una función (necesariamente inyectiva) $r \mapsto A_r$ entre $\mathbb{R}$ y $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ tal que $r \leq s \iff A_r \subseteq A_s$.

0.3. Clases

Una ***clase*** se corresponde intuitivamente con una colección de conjuntos C descripta por una fórmula de primer orden, y se pueden utilizar parámetros para definirla. Específicamente, si $\varphi(x,\bar{x})$ es una fórmula de primer orden, denotaremos con

$$\{x : \varphi(x,\bar{x})\}$$

la clase de todos los conjuntos x que satisfacen la propiedad $\varphi(\cdot,\bar{x})$.

Las clases son sólo un modo de referirnos a fórmulas de la Teoría de Conjuntos. Por ejemplo, la afirmación "$a \in \{x : \varphi(x,\bar{x})\}$" es simplemente la fórmula "$\varphi(a,\bar{x})$". Otro ejemplo,

$$\{x : \varphi(x,\bar{x})\} \subseteq \{x : \psi(x,\bar{y})\}$$

equivale a la fórmula $\forall x\,(\varphi(x,\bar{x}) \to \psi(x,\bar{y}))$. En este caso, decimos que $\{x : \varphi(x,\bar{x})\}$ es una ***subclase*** de $\{x : \psi(x,\bar{y})\}$. Si una clase es un conjunto de pares, podemos también llamarla una relación binaria, etcétera.

En general, las expresiones que involucren clases sólo se considerarán válidas si pueden expresarse sin utilizarlas, como en los ejemplos de arriba.

Definición 0.2. La clase de todos los conjuntos será denotada con $V := \{x : x = x\}$.

Un ejemplo para entender mejor el uso de clases es la Definición 0.1. Veamos de qué manera se puede generalizar a clases. Entonces, sea $A = \{x : \varphi(x)\}$ una clase, $R = \{p : \exists x,y(p = (x,y) \wedge \psi(x,y))\}$ una relación-clase binaria y consideremos dos posibles enunciados, que podrían interpretarse como "R es *bien fundada* sobre A":

(E) toda subclase no vacía X de A tiene elemento R-minimal;

o bien

(F) todo subconjunto no vacío X de A tiene elemento R-minimal.

En este ejemplo, la afirmación (E) es un esquema y no puede escribirse como una fórmula de primer orden en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos. La afirmación (F), en cambio, sí es una fórmula (construida usando las fórmulas φ y ψ que definen a A y R, respectivamente).

Ejercicio 0.3. Escribir dicha fórmula. Convencerse de que el enunciado (E) involucra una cuantificación sobre todas las fórmulas.

De ahora en adelante, cuando digamos que una relación es bien fundada sobre una clase, nos referiremos a la fórmula dada por (F).

0.4. Ejercicios

En los siguientes ejercicios, trabajar en la teoría de Zermelo sin Fundación Z^-. Para los que tienen al final un "Modley" (Ⓜ), hay una ayuda en el Apéndice A, y para los que tienen una Ⓢ, una solución en el Apéndice B.

x0.13. Probar que si $\mathscr{A}$ es un conjunto no vacío, entonces $\bigcap \mathscr{A} := \{x : \forall U \in \mathscr{A}\,(x \in U)\}$ es un conjunto. De hecho, para este ejercicio sólo se usa Separación y Extensionalidad. Ⓜ

x0.14. Demostrar que $A \times B := \{(x,y) : x \in A \wedge y \in B\}$ es un conjunto.

x0.15. Probar que si el conjunto f es una función entonces su dominio y su imagen son conjuntos

Notar que el Axioma de Reemplazo habla de la imagen de una función *definible*, no un conjunto de pares.

x0.16. Probar que $\bigcup(\mathscr{F} \cup \{X\}) = (\bigcup \mathscr{F}) \cup X$ (un poco tedioso pero sale).

x0.17. Si usó Fundación en el Ejercicio x0.4, hágalo de nuevo. Recuerde, a nadie le interesa ese axioma. Ídem Ejercicio x0.1.

1. Ordinales

En este apunte, igual que en el libro de Kunen, trataremos de desarrollar los resultados básicos de la Teoría de Conjuntos evitando usar los Axiomas de Fundación y de Partes. Es decir, trabajaremos principalmente en la subteoría $ZF^{-} - P$.

Definición 1.1. 1. Una relación binaria R sobre un conjunto es un ***buen orden*** si es un orden total bien fundado.

2. Un conjunto x es ***transitivo*** si para todo para todos los z, y, si $z \in y$ e $y \in x$, entonces $z \in x$.

3. Un conjunto α es un ***(número) ordinal*** si es transitivo y está bien ordenado por la relación $\{(x,y) : x, y \in \alpha \wedge x \in y\}$. La clase de los ordinales será llamada Ord.

La clase Ord está bien ordenada por $\in$ (i.e., todo *subconjunto* $x \subset \mathsf{Ord}$ no vacío tiene elemento mínimo). Usaremos $<$ en lugar de $\in$ para ordinales. Es fácil probar que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si $\alpha \subseteq \beta$.

Se puede ver:

Teorema 1.2 (Paradoja de Burali-Forti)**.** Ord *no es un conjunto.*

Es decir, no hay un conjunto cuyos elementos sean todos los ordinales.

1.1. Números Naturales e Inducción

Los primeros ordinales son 0, 1 y 2 (como aparecen definidos en la Ecuación (2)). A continuación enumeramos más definiciones básicas relativas a ordinales. La función ***sucesor***, está definida para todo conjunto de la siguiente manera:

$$S(x) := x \cup \{x\}.$$

Cuando el argumento es un ordinal α, utilizamos la notación alternativa $\alpha + 1$ para $S(\alpha)$.

Lema 1.3. *Para todo α ordinal, $S(\alpha) \in \mathsf{Ord}$.*

Definición 1.4. Sea $\alpha \in \mathsf{Ord}$.

1. α es ***sucesor*** si es de la forma $S(\beta)$ para algún ordinal β. Si $\alpha \neq 0$ no es sucesor, entonces es (un ordinal) ***límite***. La clase de los ordinales límite se denota con Lim.

2. α es un ***número natural*** si para todo $\beta \leq \alpha$, β es 0 o sucesor.

3. $\omega := \{n \in \mathsf{Ord} : n \text{ natural}\}$ es la clase de todos los números naturales.

Lema 1.5. *Un ordinal α es sucesor si y sólo si tiene elemento máximo.*

Lema 1.6 ([7, Def. I.6.5])**.** *Para todo par de conjuntos A, B, $A \times B := \{\langle a,b\rangle : a \in A \wedge b \in B\}$ es un conjunto.*

Teorema 1.7 (Principio de Inducción Ordinaria)**.** *Si X es una clase tal que $0 \in X$ y $\forall n (n \in X \to S(n) \in X)$, entonces $\omega \subseteq X$.*

Definición 1.8. $B^A = {}^A B := \{f : f \text{ es función de } A \text{ en } B\}$.

Para ver que la clase ${}^A B$ es un conjunto, hay que usar el Axioma de Partes. Sin usarlo, de todos modos, se puede probar el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *1. Para todo $n \in \omega$, ${}^n B$ es un conjunto.*

2. ${}^{<\omega}B := \{f : \exists n \in \omega\,(f : n \to B)\}$ es un conjunto.

Demostración. El primer ítem se prueba por Inducción Ordinaria, y no requiere el Axioma de Infinito.

Sea $X := \{n \in \omega : {}^n B \text{ es un conjunto}\}$. Entonces $0 \in X$ puesto que ${}^0 B = \{\varnothing\}$.

Supongamos que $n \in X$, es decir, ${}^n B$ es un conjunto. Observemos que si $f : S(n) \to B$, entonces $f = f \restriction n \cup \{\langle n, f(n)\rangle\}$. Podemos entonces definir una función

$$\langle F, x\rangle \mapsto F \cup \{\langle n, x\rangle\} \tag{3}$$

que manda una $F \in {}^n B$ y un $x \in B$ en una función de $S(n)$ en B, y toda función de $S(n)$ en B viene de un par así. Por hipótesis inductiva, ${}^n B$ es un conjunto y por el Lema 1.6, ${}^n B \times B$ también lo es. Luego, la imagen de dicho conjunto por la función (3), ${}^{S(n)}B$, es un conjunto por el Axioma de Reemplazo. Entonces $S(n) \in X$. Por el Principio de Inducción Ordinaria concluimos que $\omega \subseteq X$.

Para el segundo ítem, consideremos la función definible $n \mapsto {}^n B$. La imagen de ω por esta función, $\{{}^n B : n \in \omega\}$, es un conjunto (aplicando Infinito y Reemplazo), y finalmente ${}^{<\omega}B = \bigcup\{{}^n B : n \in \omega\}$ también lo es por el Axioma de Unión. ⊣

Teorema 1.10 (Principio de Inducción en Ord)**.** *Sea X una clase. Si se dan las siguientes condiciones:*

1. *$0 \in X$;*

2. *$\alpha \in X$ implica $S(\alpha) \in X$ para todo α; y*

3. *Si $\gamma \in \mathsf{Lim}$, $(\forall \alpha < \gamma, \alpha \in X) \to \gamma \in X$,*

entonces $\mathsf{Ord} \subseteq X$.

Este resultado también se conoce como ***Principio de Inducción Transfinita***.

1.2. Ejercicios

x1.1. Probar los Lemas 1.3 y 1.5.

x1.2. Para $n, l \in \omega$, $n > l$ implica que existe $m \geq l$ tal que $n = m + 1$.

x1.3. Si X es un conjunto de ordinales, $\bigcup X$ es un ordinal y es el supremo de X.

x1.4. Si C es una clase no vacía de ordinales, entonces $\bigcap C$ es el mínimo de C.

1.3. Ordinales como tipos de buenos órdenes

Definición 1.11. Un ***isomorfismo*** entre los posets $\mathbf{P} := \langle P, \leq^{\mathbf{P}}\rangle$ y $\mathbf{Q} := \langle Q, \leq^{\mathbf{Q}}\rangle$ es una función biyectiva $f : P \to Q$ tal que $x \leq^{\mathbf{P}} y \iff f(x) \leq^{\mathbf{Q}} f(y)$. Si hay tal f, entonces decimos que los posets son ***isomorfos***.

Lema 1.12. *Sea $X \subseteq \mathsf{Ord}$ conjunto con el orden heredado y sea $f : \langle X, <\rangle \to \langle \delta, <\rangle$ un isomorfismo. Luego $f(\zeta) \leq \zeta$ para todo $\zeta \in X$.*

Demostración. Por el absurdo. Tomemos el menor ζ tal que $f(\zeta) > \zeta$; luego $\zeta < f(\zeta) \in \delta$ y en consecuencia $\zeta \in \delta$. Como f es sobre, existe $\beta \in X$ tal que $f(\beta) = \zeta < f(\zeta)$. Luego $\beta < \zeta$ puesto que f es un isomorfismo. Por minimalidad de ζ tenemos $\zeta = f(\beta) \leq \beta < \zeta$, una contradicción. ⊥

Corolario 1.13 (Rigidez de los ordinales)**.** *Sean $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$ y $f : \alpha \to \beta$ iso. Luego $\alpha = \beta$ y $f = \mathrm{id}_\alpha$.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que $\alpha \subseteq \beta$.

Por el Lema 1.12, $f(x) \leq x$ para todo $x \in \alpha$.[2] Usando el mismo Lema con el iso f^{-1}, obtenemos $f^{-1}(y) \leq y$ para todo $y \in \beta \supseteq \alpha$. Aplicando f a ambos lados de la desigualdad, conseguimos

$$f(f^{-1}(y)) \leq f(y) \implies y \leq f(y) \quad \text{para todo } y \in \alpha.$$

En conclusión, f es la identidad en α y por ser sobre, $\alpha = \beta$. ⊥

Corolario 1.14. *Sea R un buen orden sobre A. Luego hay a lo sumo un $\alpha \in \mathsf{Ord}$ y un isomorfismo $h : \langle A, R\rangle \to \langle \alpha, \in\rangle$.*

Demostración. Supongamos $h : \langle A, R\rangle \to \langle \alpha, \in\rangle$ y $h' : \langle A, R\rangle \to \langle \alpha', \in\rangle$ isomorfismos. Luego $h' \circ h^{-1}$ es un isomorfismo de α en α', luego debe ser la identidad por rigidez. En conclusión, $h = h'$ y $\alpha = \alpha'$. ⊥

Definición 1.15. Sea R una relación binaria sobre A. El ***segmento inicial*** determinado por $a \in A$ es el conjunto de sus R-predecesores:

$$\mathrm{pred}_{A,R}(a) = \mathrm{pred}(a) = a{\downarrow} := \{x \in A : x \mathrel{R} a\}.$$

Lema 1.16. *Sea $h : \langle A, R\rangle \to \langle X, <\rangle$ un isomorfismo. Luego*

1. *h preserva segmentos iniciales: $h[a{\downarrow}] = h(a){\downarrow}$.*
2. *Si $B \subseteq A$, $h \restriction B$ es iso sobre su imagen.* ⊥

Corolario 1.17. *Si $h : \langle A, R\rangle \to \langle \alpha, \in\rangle$ es un iso sobre un ordinal y $a \in A$, entonces $h[a{\downarrow}] = h(a)$.*

Demostración. Por ser α transitivo, $h(a){\downarrow} = \{\beta : \beta \in h(a)\} = h(a)$. ⊥

Ejercicio 1.18. Si $\langle A, R\rangle$ y $\langle X, <\rangle$ son órdenes totales y $h : A \to X$, entonces h es un isomorfismo si y sólo si es sobre y cumple con $\forall a, b \in A\, (a \mathrel{R} b \implies h(a) < h(b))$.

[2] Alternativamente, $f(x) \leq x < \alpha$ implica $f(x) < \alpha$, y al ser f sobreyectiva, $\beta \subseteq \alpha$. Considerando f^{-1}, obtenemos $\alpha \subseteq \beta$ también.

Ejercicio 1.19. Sean x y $\psi(y,z,\bar{x})$ que cumplen las hipótesis de Reemplazo. Luego existe una función (conjunto) f tal que para todo $y \in x$, se da $\psi(y, f(y), \bar{x})$.

Teorema 1.20 (Ordinales son los tipos de buenos órdenes)**.** *Sea R un buen orden sobre A. Luego hay un único $\alpha \in \mathsf{Ord}$ isomorfo a $\langle A, R\rangle$.*

Demostración. La unicidad está asegurada por el Corolario 1.14. Diremos que $a \in A$ es *bueno* si el subposet $a{\downarrow}$ cumple con el Teorema; es decir, si existe un ordinal isomorfo a $a{\downarrow}$. Llamemos G al subconjunto de los elementos buenos de A. Por Corolario 1.14 de Rigidez, hay a lo sumo un ordinal isomorfo a $a{\downarrow}$ y un único isomorfismo sobre este ordinal. Aplicando el Ejercicio 1.19 dos veces, hay una función f tal que $f(a)$ es el único ordinal isomorfo a $a{\downarrow}$, y para cada a, $h_a : a{\downarrow} \to f(a)$ es el único isomorfismo. Veamos que:

($\dagger$) Para todo $a \in G$ y todo $c\,R\,a$, se da que $c \in G$ y $f(c) = h_a(c)$.

Supongamos que $a \in G$ y $c\,R\,a$, es decir $c \in a{\downarrow}$. Luego la restricción del iso h_a, $h_a \restriction (c{\downarrow}) : c{\downarrow} \to h_a[c{\downarrow}]$ es iso (por el Lema 1.16.2) y aplicando el Corolario 1.17, $h_a[c{\downarrow}] = h_a(c)$ es un ordinal. Luego $c \in G$ y $f(c) = h_a(c)$.

Probaremos que f es un isomorfismo de $\langle G, R\rangle$ sobre un ordinal. Preserva orden: $c\,R\,a$ implica $f(c) = h_a(c) \in f(a)$ (luego es iso sobre su imagen por el Ejercicio 1.18). La imagen de f es un ordinal: si $\eta \in \xi = f(a)$, entonces $\eta = h_a(c) = f(c)$ para algún $c \in a{\downarrow}$; luego η también está en la imagen.

Sea $\alpha = \mathrm{img}(f)$. Veremos por último que $G = A$, así que f es un isomorfismo de $\langle A, R\rangle$ sobre α. Por ($\dagger$), resulta que G es un segmento inicial de A. Si $A \setminus G$ fuera no vacío, y e es su menor elemento, debería ser $G = e{\downarrow}$. Pero entonces $e{\downarrow} \cong \alpha$ y por ende $e \in G$, absurdo. Entonces $G = A$ y queda demostrado el Teorema. ⊥

Definición 1.21. Si R es un buen orden sobre A, denotamos con $\mathrm{tipo}(A;R)$ (o con $\mathrm{tipo}(A)$ ó $\mathrm{tipo}(R)$ si el contexto lo permite), al único ordinal isomorfo a $\langle A, R\rangle$.

Corolario 1.22 (de la prueba)**.** *Para cada $\beta < \mathrm{tipo}(A;R)$, existe $a \in A$ tal que $\beta = \mathrm{tipo}(a{\downarrow})$.*

Demostración. Sea $\alpha := \mathrm{tipo}(A;R)$. En la notación de la prueba del Teorema 1.20, notar que f es un isomorfismo de $\langle A, R\rangle$ sobre α. Luego si $\beta \in \alpha$, hay a tal que $f(a) = \beta$ y $h_a : a{\downarrow} \to \beta$ es isomorfismo. ⊥

Lema 1.23. *Sea $\langle A, R\rangle$ un buen orden y $X \subseteq A$. Luego* $\mathrm{tipo}(X;R) \leq \mathrm{tipo}(A;R)$.

Demostración. Por el Teorema 1.20, podemos reemplazar a A por un ordinal $\alpha = \mathrm{tipo}(A)$ y a R por $<$. Sea $\delta := \mathrm{tipo}(X)$ y sea $f : X \to \delta$ isomorfismo. Por el Lema 1.12, $f(x) \leq x \in \alpha$ para todo $x \in X$. Luego $\mathrm{tipo}(X) = f[X] \subseteq \alpha = \mathrm{tipo}(A)$. En conclusión, $\mathrm{tipo}(X) \leq \mathrm{tipo}(A)$. ⊥

1.4. Aritmética ordinal

Definición 1.24. El ***producto ordenado*** $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ de dos posets $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ es el poset $\langle Q \times P, <_{lex}\rangle$ con el ***orden lexicográfico***:

$$(q_1, p_1) <_{lex} (q_2, p_2) \iff q_1 <^{\mathbf{Q}} q_2 \vee (q_1 = q_2 \wedge p_1 <^{\mathbf{P}} p_2).$$

Definición 1.25. 1. La ***unión disjunta*** de dos conjuntos A y B es el conjunto

$$A \oplus B := \{0\} \times A \cup \{1\} \times B.$$

2. Dados $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$, la ***suma ordinal*** es

$$\alpha + \beta := \text{tipo}(\langle \alpha \oplus \beta, <_{lex} \rangle),$$

y el ***producto ordinal*** se define como

$$\alpha \cdot \beta := \text{tipo}(\langle \beta \times \alpha, <_{lex} \rangle),$$

donde en cada ordinal consideramos el orden estándar $< = \in$.

La regla mnemotécnica para recordar cómo se define el producto ordinal es leer $\alpha \cdot \beta$ como "α repetido β veces"; es decir, se toma el buen orden $\langle \beta, \in \rangle$ y se reemplaza cada punto por una copia del orden $\langle \alpha, \in \rangle$.

La notación introducida en la Subsección 1.1 pega bien con la definición de suma:

Ejercicio 1.26. $\alpha + 1 = S(\alpha)$, y además la suma ordinal es asociativa: $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

Ayuda. Basta ver que $\alpha \oplus (\beta \oplus \gamma) \cong (\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma$. ⊥

Proposición 1.27. *La suma preserva* **supremos límite** *en la segunda variable. Es decir, si* $\gamma \in \mathsf{Lim}$,

$$\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}.$$

Demostración. Sea $s := \sup\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$. Veremos las dos desigualdades.

Notemos que si $\delta < \gamma$, $\alpha \oplus \delta \subseteq \alpha \oplus \gamma$. Luego por el Lema 1.23,

$$\alpha + \delta = \text{tipo}(\alpha \oplus \delta) \leq \text{tipo}(\alpha \oplus \gamma) = \alpha + \gamma.$$

Entonces $s \leq \alpha + \gamma$.

Para la otra dirección, observemos que $\alpha + \gamma$ no tiene último elemento, así que $\alpha + \gamma = \sup(\alpha + \gamma) = \sup\{\beta : \beta < \alpha + \gamma\}$. Luego, para probar $\alpha + \gamma \leq s$ basta ver que para todo $\beta < \alpha + \gamma$ existe $\delta < \gamma$ tal que $\beta \leq \alpha + \delta$.

Sea $f : \alpha + \gamma \to \alpha \oplus \gamma$ iso, y $\beta < \alpha + \gamma$. Luego hay $\delta < \gamma$ tal que $f(\beta) \leq \langle 1, \delta \rangle$.[3] Sea $\beta' < \alpha + \gamma$ tal que $f(\beta') = \langle 1, \delta \rangle$; tenemos entonces $\beta' \geq \beta$. Luego $f \restriction \beta' : \beta' \to \langle 1, \delta \rangle{\downarrow}$ es iso. Pero $\langle 1, \delta \rangle{\downarrow} = \alpha \oplus \delta$, así que $\beta' = \alpha + \delta$ por rigidez. ⊥

1.5. Ejercicios

En los siguientes ejercicios, las primeras letras del alfabeto griego denotarán ordinales.

x1.5. Probar que ningún buen orden estricto es isomorfo a uno de sus segmentos iniciales.

x1.6. Representar a $\omega + \omega$ y a $\omega \cdot \omega$ como subposets de $\mathbb{R}$.

x1.7. Probar que si $\beta < \gamma$, entonces $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

x1.8. Para todo $\alpha \geq \beta$ existe un único γ tal que $\alpha = \beta + \gamma$. ⊥

[3] Se puede tomar δ como la segunda componente de $f(\beta)$ si es menor a γ, y sino 0.

1.6. Recursión en Ordinales

Junto a la observación trivial de que $\alpha \oplus 0 \cong \alpha$, el Ejercicio 1.26 y la Proposición 1.27 implican que la suma satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha+\beta) \\ \alpha + \gamma &= \sup\{\alpha+\delta : \delta < \gamma\},\ \gamma \text{ límite}, \end{aligned}$$

que pueden considerarse como una definición recursiva de la suma ordinal.

En general, tenemos el siguiente resultado, que será consecuencia del Teorema de Recursión sobre relaciones bien fundadas (Sección 2):

Teorema 1.28 (Recursión en Ord)**.** *Sea $G : V \times V \to V$ definible. Luego hay una única $F : \mathsf{Ord} \to V$ tal que $F(\xi) = G(\xi, F \restriction \xi)$ para todo $\xi \in \mathsf{Ord}$.*

Es decir, G viene definida por una fórmula $\varphi(x, f, y, \bar{z})$ en la que y depende funcionalmente de x y f, y $\bar{z}$ son parámetros; y la tesis enuncia que hay una única fórmula (a más de equivalencia en $ZF^{-} - P$) $\psi(x, y, \bar{z})$ que define una función F en Ord tal que para cada $\xi \in \mathsf{Ord}$, si f es la función dada por el Ejercicio 1.19 para ψ con $A = \xi + 1$, entonces se da $\varphi(\xi, f \restriction \xi, f(\xi), \bar{z})$.

Con este Teorema disponible, la definición recursiva de la suma se hace de la siguiente manera:

- Definiremos "sumar α a la izquierda", es decir, $F(\xi) = \alpha + \xi$ (α es un parámetro).
- Para esto, la función G da α si $\xi = 0$ (notar que la función parcial f es vacía: $F \restriction 0 = \varnothing$);
- G usa el valor anterior de F si ξ es sucesor (i.e., de la función parcial f sólo me fijo en el último valor que tomó);
- sino, usa todos los valores anteriores si ξ es límite, y toma el supremo.

Es decir,

$$G(f) := \begin{cases} \alpha & f = \varnothing \\ S(f(\beta)) & f \text{ es una función y } \operatorname{dom} f = S(\beta) \\ \sup(\operatorname{img} f) & f \text{ es una función y } \operatorname{dom} f \in \mathsf{Lim} \\ \varnothing & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La última cláusula asegura que G está definida para *todos* los argumentos.

Ejercicio 1.29. Escribir la fórmula φ que corresponde a esta G. Pueden utilizarse las abreviaciones $S(\cdot)$, $\bigcup$, img, $\varnothing$, dom y Lim.

Por ejemplo, $\alpha + 0 = F(0) = G(F \restriction 0) = G(\varnothing) = \alpha$,

$$\alpha + 1 = F(1) = G(F \restriction 1) = G(\{\langle 0, \alpha\rangle\}) = S(f(0)) = S(\alpha)$$

pues $\operatorname{dom} f = \{0\} = S(0)$, y asumiendo que $F(n) = \alpha + n$ para todo $n \in \omega$,

$$\alpha + \omega = F(\omega) = G(F \restriction \omega) = \sup(\operatorname{img}(F \restriction \omega)) = \sup\{\alpha + n : n \in \omega\}.$$

Por ejemplo, demos una definición recursiva del producto ordinal:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &:= 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &:= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \gamma &:= \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}, \ \gamma \text{ límite,} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.30. Probemos por inducción en Ord que el producto ordinal es monótono en la segunda variable. Es decir, probaremos por inducción en ξ que

Para todo α y todo $\beta \leq \xi$, se da $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \xi$.

$\boxed{\xi = 0}$ Es obvio, porque si $\beta \leq 0$ entonces $\beta = 0$, y tenemos la (des)igualdad.

$\boxed{\xi + 1}$ Supongamos que vale para ξ. Sea ahora $\beta \leq \xi + 1$. Como antes, si son iguales es trivial; entonces supongamos que $\beta \leq \xi$.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \beta &\leq \alpha \cdot \xi && \text{hipótesis inductiva} \\ &= \alpha \cdot \xi + 0 && \text{definición de } + \\ &\leq \alpha \cdot \xi + \alpha && + \text{ es monótona (x1.7)} \\ &= \alpha \cdot (\xi + 1) && \text{definición de } \cdot \end{aligned}$$

$\boxed{\gamma \in \mathsf{Lim}}$ Nuevamente, supongamos $\beta < \gamma$ y probemos $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \gamma$. Como $\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \delta : \delta < \gamma\}$, debe ser mayor o igual que cualquier $\alpha \cdot \delta$ con $\delta < \gamma$. En particular, para $\delta = \beta$.

Definición 1.31. Una función $F : \mathsf{Ord} \to \mathsf{Ord}$ es ***normal*** si es estrictamente creciente y preserva supremos límite, i.e., $F(\gamma) = \sup\{F(\beta) : \beta < \gamma\}$ cuando γ es límite.

Comentario. Las funciones normales resultan exactamente las que son crecientes y continuas en la *topología del orden*.

Proposición 1.32. *Sea F monótona creciente que preserve supremos límite. Entonces, $F(\sup X) = \sup F[X]$ para todo conjunto X de ordinales.*

Demostración. Si X tiene mayor elemento, es consecuencia directa de la monotonía. Para el caso de que $\sup X$ sea un ordinal límite, se deben usar ambas propiedades. Queda como ejercicio. ⊥

Ejercicio 1.33. Dar ejemplo de función f que preserve supremos límite pero tal que existan $\gamma \in \mathsf{Lim}$ y $X \subseteq \gamma$ con $\gamma = \sup X$ pero $f(\sup X) \neq \sup f[X]$.

Corolario 1.34. *Sea F normal. Entonces, $F(\sup X) = \sup F[X]$ para todo conjunto X de ordinales.*

La suma ordinal es normal en la segunda variable por la Proposición 1.27. Por su parte, la función $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ preserva supremos límite (por la definición recursiva). Luego:

Corolario 1.35. *Para todo α y $X \subset \mathsf{Ord}$, $\alpha + \sup X = \sup\{\alpha + \beta : \beta \in X\}$ y $\alpha \cdot \sup X = \sup\{\alpha \cdot \beta : \beta \in X\}$.*

1.7. Ejercicios

x1.9. Probar que $\beta \mapsto \alpha \cdot \beta$ es estrictamente creciente para $\alpha \neq 0$ (es el mismo argumento del Ejemplo 1.30). Luego es normal.

x1.10. Probar la Proposición 1.32.

x1.11. Probar las siguientes propiedades de las operaciones ordinales:

a) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Ⓢ

b) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Ⓢ

c) $1 + \omega = \omega < \omega + 1$.

d) $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2$.

x1.12. Definir recursivamente la operación de exponenciación de ordinales de manera que se cumplan las leyes de los exponentes:

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} \qquad\qquad \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^{\beta})^{\gamma}.$$

y la continuidad $\alpha^{\beta} = \sup\{\alpha^{\gamma} : \gamma < \beta\}$ cuando β es límite y $\alpha > 0$.

a) (Tsaban [10]) ¿Qué pasa cuando $\alpha = 0$?

b) ¿Cuánto da 2^{ω}? (no confundir con la exponenciación cardinal).

x1.13. Sea $\varepsilon_0 := \sup_{n\in\omega} \alpha_n$ donde $\alpha_0 := \omega$ y $\alpha_{n+1} := \omega^{\alpha_n}$. Probar que ε_0 es el menor ε tal que $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$.

x1.14. Probar que los puntos fijos de una función normal no son acotados. ⓛ

Una clase C de ordinales es ***cerrada*** si para cada conjunto no vacío $X \subseteq C$, $\sup X \in C$.

x1.15. Los puntos fijos de una función normal forman una clase cerrada.

En general, cuando una clase es cerrada y no acotada (en un ordinal o en Ord), se dice que es un ***club***. Luego, los puntos fijos de una función normal son un club en Ord.

Trabajando en ZF^{-}, se puede dar una primera definición por recursión en Ord de los conjuntos V_α de la *jerarquía acumulativa*.

$$\begin{aligned} V_0 &:= \varnothing \\ V_{\alpha+1} &:= \mathscr{P}(V_\alpha) \\ V_\gamma &:= \bigcup\{V_\alpha : \alpha < \gamma\}, \qquad \gamma \text{ límite.} \end{aligned}$$

x1.16. Probar las siguientes:

a) Para todo ordinal α, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$.

b) $\alpha < \beta$ implica $V_\alpha \subseteq V_\beta$.

c) Para cada α, V_α es transitivo.

d) $\alpha \subseteq V_\alpha$. En conclusión, $\alpha \in V_{\alpha+1}$.

Se puede ver que el Axioma de Fundación es equivalente a $V = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Ord}} V_\alpha$ bajo ZF^{-}.

En la Sección 9 daremos una definición distinta de los V_α (y usaremos la notación $R(\alpha)$) que no depende del Axioma de Partes. Sin embargo, para demostrar que son conjuntos, sí hace falta dicho axioma.

2. Inducción y recursión sobre relaciones bien fundadas

En esta sección, cuando nos refiramos a una relación R, se entenderá que R está definida por una formula con (al menos) dos variables libres (i.e., es una clase). Los resultados de esta sección son independientes de los que involucran la aritmética ordinal y cardinal.

Definición 2.1. Sea R una relación y A una clase.

1. s es un ***R-camino de longitud*** $n+1$ ***en*** A si $n \in \omega$, $n \geq 1$, s es una función, $\mathrm{dom}(s) = n+1$, $\mathrm{img}(s) \subseteq A$ y $\forall j < n, s(j)\, R\, s(j+1)$. Decimos que s es un camino ***en*** A ***de*** $s(0)$ ***a*** $s(n)$.
2. La ***clausura transitiva*** de R en A es la relación R^* definida por $x\, R^*\, y$ sii existe un camino en A de x a y.

La siguiente observación elemental es la llave para los resultados posteriores.

Lema (∗) 2.2. *Si R es una relación y A es una clase con $x, z \in A$, entonces son equivalentes:*

- *$x\, R^*\, z$ (vía un camino de longitud $n+1$); y*
- *$[n = 1$ y $x\, R\, z]$ ó $[n > 1$ y existe un $y \in A$ tal que $x\, R^*\, y$ (vía un camino de longitud n) e $y\, R\, z]$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $x\, R^*\, z$. Luego hay un R-camino $s : n+1 \to A$, con $s(0) = x$ y $s(n) = z$. Si $n = 1$, entonces $x = s(0)\, R\, s(1) = z$ por definición de camino. En caso contrario, si $n > 1$, por el Ejercicio x1.2 existe $m \geq 1$ tal que $n = m+1$ y la función $s \restriction (m+1)$ es un camino de x a $y := s(m)$ de longitud n; es decir, $x\, R^*\, y$. Por último, $y = s(m)\, R\, s(m+1) = z$, y tenemos la implicación directa.

($\Leftarrow$) Si $x\, R\, z$ entonces podemos definir el R-camino $\{\langle 0, x\rangle, \langle 1, z\rangle\}$ de longitud $1+1$ de x a z como arriba. Por otro lado, en el caso de la segunda condición, sea un R-camino $s : n \to A$, de longitud n de x a y, donde $n > 1$. Luego por Ejercicio x1.2 hay un $m \geq 1$ tal que $n = m+1$. La función $s' := s \cup \{\langle n, z\rangle\}$ es un camino de longitud $n+1$ entre x y z, puesto que por hipótesis $\forall j < m, s(j)\, R\, s(j+1)$, y además $s(m) = y\, R\, z = s(n) = s(m+1)$. En conclusión, s' atestigua que $x\, R^*\, z$. ⊥

Lema 2.3. *Si R es una relación y A es una clase, R^* es una relación transitiva en A.*

Demostración. Fijemos x e y en A tales que $x\, R^*\, y$. Probaremos, por inducción ordinaria en m, que para todo $z \in A$ tal que $y\, R^*\, z$ vía un camino de longitud m, se da que $x\, R^*\, z$.

$\boxed{m = 2}$ En este caso, tenemos $x\, R^*\, y\, R\, z$, luego $x\, R^*\, z$ por el Lema (∗) 2.2.

$\boxed{m+1}$ Sea $z \in A$, y supongamos que hay un camino de longitud $m+1$ entre y y z. Por el Lema (∗) 2.2 existe $w \in A$ tal que $w\, R\, z$ y hay un camino de longitud m entre y y w; por hipótesis inductiva tenemos $x\, R^*\, w$. Nuevamente el Lema (∗) 2.2 asegura que $x\, R^*\, z$. ⊥

Proposición 2.4. *La clausura transitiva R^* de R en A es la menor relación transitiva sobre A que contiene a $R \restriction A$.* ⊥

Comentario. Frecuentemente se utiliza la notación R^* para la clausura *reflexiva y transitiva* de una relación, y se reserva R^+ para la clausura transitiva. Si R es bien fundada, entonces R es irreflexiva, y se puede demostrar que su clausura transitiva también lo es.

Es importante destacar que en el caso de una relación R sobre un conjunto A, R^* se puede obtener como la intersección de todas las relaciones transitivas (conjuntos) sobre A que contienen a $R \upharpoonright A$. Sin embargo, cuando A es una clase, este procedimiento es ilegal (no se puede escribir "todas las clases" en la lógica de primer orden).

Definición 2.5. Diremos que una relación R es ***conjuntista*** en A si para cada $a \in A$, $\mathrm{pred}_{A;R}(a)$ es un conjunto.

Lema 2.6. *Si R es conjuntista en A entonces R^* también lo es.*

Demostración. Para cada $a \in A$, sea $D_n(a)$ la clase de los $x \in A$ tales que $x \, R^* \, a$ vía un camino de longitud $n+1$. Probaremos por inducción en n que para todo $a \in A$, $D_n(a)$ es un conjunto. Para comenzar, $D_0(a) = \varnothing$ por no haber caminos de longitud 1. Supongamos ahora que para n la afirmación es cierta, y sea $a \in A$. Por el Lema $(*)$ 2.2, tenemos

$$D_{n+1}(a) = \bigcup\{D_n(b) : b \in a{\downarrow}\}.$$

El Axioma de Reemplazo asegura que $\{D_n(b) : b \in a{\downarrow}\}$ es un conjunto puesto que los $D_n(b)$ lo son por hipótesis inductiva y $a{\downarrow}$ lo es por ser R conjuntista, y el Axioma de Unión garantiza que $D_{n+1}(a)$ también lo es.

Finalmente, si $a \in A$, $\mathrm{pred}_{A,R^*}(a) = \bigcup\{D_n(a) : n \in \omega\}$ es un conjunto por Infinito, Reemplazo y Unión.

Comentario. En [7, Lemma I.9.5(2)] hay una prueba esencialmente igual a la que acabamos de presentar, pero la descomposición de los $D_{n+1}(a)$ es distinta aquí para poder aprovechar el Lema $(*)$ 2.2.

Teorema 2.7 (Inducción Bien Fundada)**.** *Si R es bien fundada y conjuntista en A, y X es una subclase no vacía de A, entonces X tiene un elemento R-minimal.*

Equivalentemente, si X satisface $\forall x \in A\,(x{\downarrow} \subseteq X \to x \in X)$ entonces $A \subseteq X$.

Demostración. Fijemos $a \in X$. Si a es R-minimal en X, estamos. Sino, sea b un elemento R-minimal del conjunto $\mathrm{pred}_{R^*}(a) \cap X$. Luego b es R-minimal en X, puesto que si $y \, R \, b$ tenemos $y \in \mathrm{pred}_{R^*}(a)$ por la transitividad de R^* y entonces $y \notin X$, por la minimalidad de b.

Teorema 2.8 (Recursión Bien Fundada)**.** *Sea R bien fundada y conjuntista sobre A y sea $G : V \times V \to V$ definible. Luego hay una única $F : V \to V$ tal que $F(a) = G(a, F \upharpoonright (a{\downarrow}))$ para todo $a \in A$ y $F(x) = 0$ para todo $x \notin A$.*

Nuevamente, este enunciado se interpreta como el Teorema 1.28. Es decir, supongamos que hay una fórmula φ tal que $\forall x, s \, \exists! y \, \varphi(x,s,y)$ y escribimos $y = G(x,s)$ en lugar de $\varphi(x,s,y)$. Luego hay otra fórmula ψ tal que $\forall x \exists! y \, \psi(x,y)$; y si f es la función dada por el Lema 1.19 para el conjunto $a{\downarrow} \cup \{a\}$ y la fórmula ψ (es decir, $f = F \upharpoonright (a{\downarrow} \cup \{a\})$), entonces se da que $f(a) = G(a, f \upharpoonright (a{\downarrow}))$. Más aún, cualquier otra ψ' que cumpla con la conclusión debe ser equivalente a ψ bajo $ZF^- - P$.

Este Teorema incluye el caso en el que A es un *conjunto*, por lo que justifica también las definiciones recursivas sobre relaciones bien fundadas en un conjunto.

Para probar este Teorema, necesitaremos definir el concepto de *aproximación* a una solución de la ecuación $F(a) = G(a, F \restriction (a\downarrow))$. Estas aproximaciones funcionarán análogamente a las funciones h_a de la prueba del Teorema 1.20. Sea, entonces, $\mathrm{Aprox}(d,h)$ la fórmula que dice:

1. d es "R-cerrado para abajo": $\forall y \in d, y\downarrow \subseteq d$;

2. h es una función con $\mathrm{dom}\, h = d \subseteq A$; y

3. para todo $y \in d$, $h(y) = G(y, h \restriction (y\downarrow))$.

Es decir, h cumple con la definición recursiva dentro de d. Observemos que d debe contener, además de los predecesores de un $y \in d$, todos sus R^*-predecesores. Usaremos $y\downarrow^*$ para denotar el conjunto $\mathrm{pred}_{R^*}(y)$ de R^*-predecesores de y.

Lema 2.9. *Supongamos* $\mathrm{Aprox}(d,h)$*. Luego para todo* $z \in d$*,* $z\downarrow^* \subseteq d$*.*

Demostración. Lo probemos por inducción bien fundada. Para ello, sea z minimal en d tal que $z\downarrow^* \nsubseteq d$, i.e., existe un $x \in z\downarrow^* \setminus d$; en particular, $x \not R\, z$. Por el Lema (∗) 2.2 existe un y tal que $x\, R^*\, y\, R\, z$ y en conclusión $y \in d$. Por minimalidad de z, tenemos que $x \in d$, absurdo. ⊥

Definimos $h_x := h \restriction (\{x\} \cup x\downarrow^*)$ para toda h con $\{x\} \cup x\downarrow^* \subseteq \mathrm{dom}\, h$.

Lema 2.10. *Si* $x \in d$ *y* $\mathrm{Aprox}(h,d)$*, entonces* $\mathrm{Aprox}(\{x\} \cup x\downarrow^*, h_x)$*.*

Demostración. En primer lugar, por el Lema 2.9, $x\downarrow^* \subseteq d$, así que la notación h_x tiene sentido aquí. Veamos que $d_x := \{x\} \cup x\downarrow^*$ es R-cerrado para abajo. Supongamos $y \in d_x$ y $z\, R\, y$; esto último implica que $z\, R^*\, y$. Si $y = x$, entonces $z \in x\downarrow^*$, luego $z \in d_x$. Si $y \in x\downarrow^*$, entonces $z\, R^*\, y\, R^*\, x$, y por transitividad de R^*, $z\, R^*\, x$; en este caso también $z \in d_x$.

Finalmente, $\mathrm{dom}\, h_x = d_x$ por construcción y como d_x es R-cerrado para abajo, cumple con la ecuación recursiva (puesto que valía en el conjunto mayor d). ⊥

Lema 2.11 (Unicidad de aproximaciones)**.** *Supongamos* $\mathrm{Aprox}(d,h)$ *y* $\mathrm{Aprox}(d',h')$*. Entonces* $h(x) = h'(x)$ *para todo* $x \in d \cap d'$*. En particular,* $h_x = h'_x$ *para todo* $x \in d \cap d'$*.*

Demostración. En busca de un absurdo, supongamos que $X := \{x \in d \cap d' : h(x) \neq h'(x)\}$ es no vacío. Por inducción bien fundada, tomemos un elemento R-minimal $x \in X$; en particular, $x\downarrow \subseteq d \cap d'$. Por la minimalidad de x, tenemos $h \restriction (x\downarrow) = h' \restriction (x\downarrow)$, así que la ecuación recursiva implica lo siguiente:

$$h(x) = G(x, h \restriction (x\downarrow)) = G(x, h' \restriction (x\downarrow)) = h'(x).$$

Esto contradice la elección de x.

La última afirmación se sigue de que $\{x\} \cup x\downarrow^* \subseteq d \cap d'$ por el Lema 2.9. ⊥

Prueba del Teorema 2.8. La fórmula que define $y = F(x)$ será la siguiente:

$$(x \notin A \wedge y = 0) \vee \big(x \in A \wedge \exists d, h\, (\mathrm{Aprox}(d,h) \wedge x \in d \wedge h(x) = y)\big).$$

Es decir, el valor de $F(x)$ es el valor de cualquiera de sus aproximaciones que tenga a x en su dominio. Hay que verificar buena definición y unicidad.

Para la buena definición, hay que ver que dos aproximaciones h y h' no pueden diferir en el valor en x y que existe al menos una aproximación con x en su dominio. La primera propiedad está asegurada por el Lema de unicidad de aproximaciones. La existencia se prueba por inducción bien fundada. Debemos ver que para todo $x \in A$ existen d, h tales que $x \in d$ y $\mathrm{Aprox}(h,d)$.

Supongamos por el absurdo que $X := \{x \in A : \neg\exists d, h : x \in d \wedge \mathrm{Aprox}(h,d)\}$ es no vacío; por el Teorema 2.7 podemos tomar un $a \in X$ R-minimal. Por minimalidad, $x\,R\,a$ implica $x \notin X$. El Lema de unicidad de aproximaciones permite aplicar el Axioma de Reemplazo usando el conjunto $a{\downarrow}$ y la aplicación $x \mapsto h_x$; luego $\{h_x : x \in a{\downarrow}\}$ es un conjunto de funciones y nuevamente por la unicidad, su unión es una función $\tilde{h}$.

Afirmación. $\mathrm{Aprox}(a{\downarrow}^*, \tilde{h})$.

Prueba de la Afirmación. Sea $x \in a{\downarrow}^*$; por transitividad de R^* es inmediato que $x{\downarrow} \subseteq a{\downarrow}^*$. En segundo lugar, el dominio de h_x es $\{x\} \cup x{\downarrow}^*$, y es fácil ver que la unión de todos estos conjuntos para $x\,R\,a$ da exactamente $a{\downarrow}^*$. Por último, se cumple la ecuación recursiva. Supongamos que $y \in a{\downarrow}^*$. Entonces $y \in \{x\} \cup x{\downarrow}^* = \mathrm{dom}\, h_x$ para algún $x\,R\,a$. Entonces

$$\tilde{h}(y) = h_x(y) = G(y, h_x \restriction (y{\downarrow})) = G(y, \tilde{h} \restriction (y{\downarrow})). \quad \boxminus$$

Sea ahora $d := a{\downarrow}^* \cup \{a\}$ y sea $h := \tilde{h} \cup \{\langle a, G(a, \tilde{h} \restriction (a{\downarrow}))\rangle\}$. Igual que en la prueba de la Afirmación, obtenemos $\mathrm{Aprox}(d,h)$, lo que contradice la definición de a.

La unicidad de F se sigue del Lema de unicidad de aproximaciones. $\boxminus$

Prueba del Teorema 1.28. La relación $< \; = \; \in$ es bien fundada sobre Ord y obviamente es conjuntista. Si $G : V \to V$ está dada, sea F la función dada por el Teorema de recursión bien fundada para $G'(x,s) := G(s)$. Luego F cumple con la ecuación recursiva necesaria sobre Ord. $\boxminus$

3. Cardinales (sin Elección)

Definición 3.1. $X \leqslant_c Y$ (respectivamente, $X =_c Y$) significa que hay una inyección (biyección) de X en Y. Usaremos $X <_c Y$ para denotar que $X \leqslant_c Y$ y no se da $X =_c Y$.

Diremos que un conjunto A es ***bien ordenable*** si existe un buen orden sobre él. Usando el Teorema 1.20, esto equivale a que exista una biyección con un ordinal.

Definición 3.2. Un ***cardinal*** es un ordinal tal que $\alpha <_c \kappa$ para todo $\alpha \in \kappa$. Si A es bien ordenable, $|A|$ denotará el único cardinal biyectivo con A.

Lema 3.3. *Sea A bien ordenable. Luego para todo $X \subseteq A$, X es bien ordenable y $|X| \leq |A|$.*

Demostración. Sea R un buen orden de A de tipo κ; por el Lema 1.23, $\mathrm{tipo}(X;R) \leq \kappa$, luego $|X| \leq \mathrm{tipo}(X;R) \leq \kappa$. $\boxminus$

Lema 3.4. *Sea A bien ordenable, y sea $f : A \to B$ una función sobreyectiva. Luego B es bien ordenable y $|A| \geq |B|$.*

Demostración. Pongamos un buen orden sobre A y definamos $g : B \to A$ de la siguiente manera:

$$g(b) := \min\{a \in A : f(a) = b\} = \min f^{-1}(b).$$

Es inmediato que g es 1-1, luego $B \leqslant_c A$ y se siguen las afirmaciones en la tesis. $\boxminus$

3.1. Teorema CSB

El Teorema de Cantor, Schröder y Bernstein para conjuntos establece, sintéticamente, la antisimetría de la relación de orden entre cardinalidades.

Teorema 3.5. *Sean X e Y conjuntos, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ funciones inyectivas. Entonces hay una biyección entre X e Y.*

Usando la notación de la Definición 3.1, el enunciado del teorema anterior se puede escribir sucintamente como:

$$X \leqslant_c Y \wedge Y \leqslant_c X \implies X =_c Y,$$

para cada X, Y.

Demostración. Definamos por recursión en $n \in \omega$,

$$X_0 := X,\ X_{n+1} := g(f(X_n)) \qquad Y_0 := Y,\ Y_{n+1} := f(g(Y_n)).$$

Probemos primero por inducción que para todo $n \geq 0$,

$$X_n \supseteq g(Y_n) \supseteq X_{n+1}, \quad Y_n \supseteq f(X_n) \supseteq Y_{n+1}. \tag{4}$$

Para $n = 0$, $X_0 = X \supseteq g(Y) \supseteq g(F(Y)) = X_1$. Supongamos por hipótesis inductiva que $X_n \supseteq g(Y_n) \supseteq X_{n+1}$. Aplico $g \circ f$ y obtengo

$$X_{n+1} \supseteq g(f(g(Y_n))) \supseteq X_{n+2}.$$

Pero $g(f(g(Y_n))) = g(Y_{n+1})$, y tenemos el resultado.

Como f es 1-1, $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$. Luego

$$f(X_n \setminus g(Y_n)) = f(X_n) \setminus f(g(Y_n)) = f(X_n) \setminus Y_{n+1}.$$

Como g es inyectiva, la inversa $g^{-1} : g(Y) \to Y$ está bien definida. Análogamente al caso anterior, $g(Y_n \setminus f(X_n)) = g(Y_n) \setminus X_{n+1}$ y luego

$$g^{-1}(g(Y_n) \setminus X_{n+1}) = Y_n \setminus f(X_n).$$

Por ultimo, si estipulamos que $X_\infty := \bigcap_n X_n$ y $Y_\infty := \bigcap_n Y_n$, obtenemos por (4) (y usando la inyectividad de f nuevamente) que $f(X_\infty) = Y_\infty$. Entonces la función definida como

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup_n \big(X_n \setminus g(Y_n)\big) \cup X_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in \bigcup_n \big(g(Y_n) \setminus X_{n+1}\big), \end{cases}$$

es una biyección de X sobre Y. ⊥⊥

Este teorema, con exactamente la misma prueba, vale para espacios medibles. La versión "boreliana" es la que sigue.

Teorema 3.6. *Sean $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ y $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$ espacios medibles, $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ incrustaciones medibles tales que $f(X) \in \mathcal{T}$ y $g(Y) \in \mathcal{S}$. Entonces $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ es isomorfo a $\langle Y, \mathcal{T} \rangle$.*

3.2. Ejercicios

x3.1. Hallar una biyección que atestigüe $[0,1) =_c [0,1]$ usando la prueba del Teorema CSB.

x3.2. Es fácil definir explícitamente una biyección entre $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \sqrt{2}\}$.

a) ¿Qué tal una entre $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ y $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\}$?

b) (*) ¿Existe alguna que preserve la relación de orden (i.e. monótona)?[4]

3.3. Teorema de Hartogs y los Alef

En esta sección trabajaremos en ZF^-.

Probaremos más adelante que AC implica que todo conjunto es bien ordenable (Teorema 4.7); luego, utilizando este axioma, es inmediato que existen cardinales arbitrariamente grandes: para todo κ, $|\mathscr{P}(\kappa)|$ es estrictamente mayor que κ. Sin embargo, una de las ideas más finas de la teoría básica de cardinales muestra que se puede hacer casi lo mismo sin invocar elección.

Teorema 3.7 (Hartogs)**.** *Para todo conjunto, hay un cardinal κ tal que $\kappa \nleqslant_c A$.*

Demostración. Sea $W := \{\langle X;R\rangle : R \text{ buen orden de } X \subseteq A\}$, el conjunto de los buenos órdenes sobre subconjuntos de A. Veremos que el conjunto de ordinales $\kappa := \text{tipo}[W]$ es un cardinal que no se inyecta en A.

Probaremos ahora la siguiente propiedad:

(+) $\alpha \in \kappa \iff \alpha \leqslant_c A$, para cada ordinal α.

($\Rightarrow$) Sea $\alpha \in \kappa$. Entonces existe $\langle X,R\rangle \in W$ con $\alpha = \text{tipo}(X;R)$ e inmediatamente $\alpha \leqslant_c A$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $f : \alpha \to A$ es inyectiva. El buen orden de α induce vía f un buen orden en $f[\alpha]$, isomorfo a α. Luego $\alpha = \text{tipo}(f[\alpha]) \in \kappa$.

Veamos que κ es un ordinal. Para ello, basta ver que es transitivo. Supongamos que $\alpha \in \beta \in \kappa$. Por (+), $\alpha \leqslant_c \beta \leqslant_c A$, luego $\alpha \leqslant_c A$ y usando (+) nuevamente, $\alpha \in \kappa$.

Ahora, κ es un cardinal. Si no lo fuera, $\kappa \leqslant_c \alpha$ para algún $\alpha < \kappa$. Pero (+) implica entonces que $\kappa \leqslant_c \alpha \leqslant_c A$, entonces $\kappa \leqslant_c A$. Nuevamente por (+), $\kappa < \kappa$, absurdo. $\boxed{\perp\!\!\perp}$

Comentario. El cardinal κ de la prueba se denota $\aleph(A)$, especialmente en ausencia de AC. La construcción de Hartogs sirve tanto para conjuntos finitos, e infinitos, y por (+) da el menor cardinal con esa propiedad. Por tal motivo, si A es finito, $\aleph(A)$ es igual al número natural $|A|+1$.

El Teorema de Hartogs también puede ser probado en Z^- (sin usar Reemplazo), si uno cambia en el enunciado "cardinal" por "conjunto bien ordenable". Para ello, uno tiene que definir κ como el conjunto de clases de equivalencia de la relación de isomorfismo sobre W.

En virtud de este resultado, se puede definir en ZF^-:

Definición 3.8. Para cada ordinal α, α^+ es el menor cardinal más grande que α. Los cardinales incontables de la forma α^+ se denominan ***sucesores*** y los demás, ***límites***.

[4]Esto motiva un teorema muy interesante de Cantor sobre órdenes densos.

Llegamos a la definición más bella desde el punto de vista tipográfico en la Teoría de Conjuntos.

Definición 3.9. Definimos por recursión en Ord la función $\aleph$:

$$\aleph_0 := \omega, \qquad \aleph_{\alpha+1} := \aleph_\alpha^+, \qquad \aleph_\gamma := \sup\{\aleph_\delta : \delta < \gamma\}, \text{ si } \gamma \in \mathsf{Lim}.$$

Es muy usual la notación ω_α para $\aleph_\alpha$, especialmente si se quiere referir a su carácter como tipo de orden.

Teorema 3.10. *La función $\aleph$ enumera todos los cardinales infinitos en forma estrictamente creciente.*

Demostración. Probaremos que $\alpha < \beta$ implica $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ por inducción en β. El resto (que cubre todos los cardinales) queda como ejercicio.

El caso $\beta = 0$ es vacuo. Supongamos que $\beta = \xi + 1$, y por hipótesis inductiva, $\aleph_\delta < \aleph_\xi$ para todo $\delta < \xi$. Observemos primero que por Hartogs, $\aleph_\delta < \aleph_\xi^+ = \aleph_{\xi+1}$. Sea ahora $\alpha < \xi + 1$. Tanto si $\alpha = \xi$, como si $\alpha < \xi$ (usando la hipótesis inductiva), la observación implica que $\aleph_\alpha < \aleph_{\xi+1}$. Por último, el caso límite se resuelve de forma elemental, por el Ejercicio x0.10. ⊥

Definición 3.11. Card denota la clase de todos los cardinales infinitos.

3.4. Ejercicios

x3.3. Demostrar que $|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = \left|{}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}\right| = 2^{\aleph_0}$.

x3.4. *a*) Probar que $\alpha \leq \aleph_\alpha$ para todo α.

b) Probar que la imagen de la función $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ son todos los cardinales infinitos.

4. El Axioma de Elección

Escrito *casi* como una fórmula de primer orden en el lenguaje $\{\in\}$, el Axioma de Elección (AC) es la siguiente oración:

$$\forall \mathscr{F} : \big(\forall A, B \in \mathscr{F} : A \neq \varnothing \wedge \neg \exists t : t \in A \wedge t \in B\big) \to \exists C : \forall A \in \mathscr{F} \big(\exists! z (z \in A \wedge z \in C)\big).$$

De manera un poco más legible, enuncia que para cualquier familia $\mathscr{F}$ de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos, existe un conjunto C "de elección" que los interseca en exactamente un elemento.

Completaremos en lo que sigue las pruebas de equivalencia de algunos enunciados famosos con el Axioma de Elección, trabajando mayormente en $ZF^- - P$ e indicando el uso del axioma de partes.

Definición 4.1. 1. AC^+ es la afirmación que todo conjunto es bien ordenable.

2. El ***Lema de Zorn*** es el enunciado que para cada poset $\mathbf{P}$, si toda cadena en $\mathbf{P}$ tiene una cota superior, entonces hay un elemento maximal en $\mathbf{P}$.

Luego, usando el Axioma de Reemplazo, AC^+ dice que todo conjunto está en biyección con un ordinal.

Lema 4.2. *AC^+ implica el Axioma de Elección.*

Demostración. Sea $\mathscr{F}$ como en el enunciado de AC, y tomemos por AC^+ un buen orden de $\bigcup \mathscr{F}$. Luego $C := \{\text{mín} A : A \in \mathscr{F}\}$. ⫫

Definición 4.3. El ***Principio Maximal de Hausdorff*** enuncia: *Todo poset tiene una cadena maximal* (i.e., que no está incluida propiamente en otra cadena).

A pesar de no ser tan popular como el Lema de Zorn, el uso de este principio resulta en pruebas ligeramente más cortas (y luego más claras) que las que utilizan Zorn (¡además es más fácil de recordar!). Un ejemplo de esto es cuando uno quiere probar que todo espacio vectorial tiene una base. El argumento usual dice que los conjuntos linealmente independientes (LI) están parcialmente ordenados por $\subseteq$, y que la unión de una $\subseteq$-cadena de conjuntos LI es LI, que automáticamente resulta cota. El Lema de Zorn asegura un elemento maximal $\mathscr{B}$, y luego se procede a probar, por el absurdo que este conjunto LI genera.

Usando el Principio de Hausdorff podemos tomar una cadena maximal de conjuntos LI, y tomamos su unión. Esta unión será LI y luego el argumento por el absurdo continúa igual.

Ejercicio 4.4. Probar que el Lema de Zorn y el Principio de Hausdorff son equivalentes.

Lema 4.5. *(ZF^-) El Principio de Hausdorff implica AC^+.*

Demostración. Sea A un conjunto; queremos construir un buen orden de A. Para ello, fijemos un cardinal κ tal que $\kappa \not\leqslant_c A$ (por ejemplo, $\aleph(A)$ dado por Hartogs). Sea $\mathscr{F}$ el conjunto de todas las $f \in \mathscr{P}(\kappa \times A)$ tales que f es una función inyectiva de un subconjunto de κ en A. $\mathscr{F}$ está ordenada por $\subseteq$. Por el Principio de Hausdorff, existe una cadena maximal $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{F}$. Luego su unión $f := \bigcup \mathscr{C}$ es una función.

Supongamos por el absurdo que $\operatorname{img}(f) \neq A$. Sea $a \in A \setminus \operatorname{img}(f)$ y fijemos $\alpha \in \kappa \setminus \operatorname{dom}(f)$ (que es no vacío porque $\kappa \not\leqslant_c A$). Entonces $f' := f \cup \{\langle \alpha, a \rangle\}$ es 1-1, y entonces $\mathscr{C} \cup \{f'\}$ es una cadena más grande que $\mathscr{C}$, una contradicción.

Entonces A es bien ordenable por el Lema 3.4. ⫫

Lema 4.6. *AC es equivalente a la afirmación de que para toda familia $\mathscr{F}$ de conjuntos no vacíos, hay una función $g : \mathscr{F} \to \bigcup \mathscr{F}$ tal que $g(A) \in A$ para todo $A \in \mathscr{F}$.*

La función g del Lema 4.6 se denomina ***selector*** o ***función de elección***.

Demostración. Ejercicio, o ver [7, Lemma I.12.3]. ⫫

Teorema 4.7. *(ZF^-) AC, AC^+, el Lema de Zorn y el Principio de Hausdorff son equivalentes.*

Demostración. Sólo falta demostrar que $AC \Rightarrow AC^+$, y esta prueba requerirá el Axioma de Partes. Sea A un conjunto. Usando el Lema 4.6, conseguimos un selector g para la familia $\mathscr{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$. Sea $\mathbb{1} \notin A$ y tomemos un ordinal κ que no se inyecte en A. Definimos recursivamente $f : \kappa \to A \cup \{\mathbb{1}\}$:

$$f(\alpha) := \begin{cases} g\big(A \setminus \{f(\beta) : \beta < \alpha\}\big) & \text{si es no vacío} \\ \mathbb{1} & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Por construcción, f es inyectiva en $f^{-1}[A]$, y debe haber un α tal que $f(\alpha) = \mathbb{1}$ puesto que $\kappa \not\leq_c A$. Tomando el menor α así, se puede ver que $f \restriction \alpha$ es una biyección entre α y A, luego A se puede bien-ordenar. ⫫

Cerramos esta sección enunciando una consecuencia de AC que es sumamente útil; prueba de esto es que gran parte de los resultados elementales de análisis que requieren AC (por ejemplo, que para calcular límites basta con observar sucesiones) se pueden demostrar utilizando este principio.

Definición 4.8. El ***Principio de elecciones dependientes (DC)*** es el siguiente enunciado: para $A \neq \varnothing$,

$$\forall A\, \forall R\, (\forall a \in A\, \exists b \in A : \langle a,b\rangle \in R) \to \exists f \in {}^{\omega}A\, (\forall n \in \omega : f(n)\, R\, f(n+1)).$$

Es decir, si para todo elemento de A hay un "sucesor" por R, entonces se puede armar un R-camino infinito. De hecho, uno puede armar sucesiones finitas arbitrariamente largas, pero para pegarlas todas y hacer una infinita hace falta AC en el caso general.

4.1. Ejercicios

x4.1. AC es equivalente a la siguiente propiedad:

> Para toda relación $R \subseteq A \times B$, $\forall x \in A\, \exists y \in B : R(x,y)$ implica que existe $f : A \to B$ tal que $\forall x \in A : R(x, f(x))$.

x4.2. AC es equivalente a la siguiente propiedad:

> Para todo $A \neq \varnothing$ y toda $f : A \to B$, existe una $g : B \to A$ tal que para todo $x \in A$ se da $f(g(f(x)) = f(x)$.

x4.3. (ZFC^-) Probar DC. ⫫

x4.4. (*) Probar en $ZF^- + DC$ la siguiente versión "punteada" de DC: si $A \neq \varnothing$,

$$\forall A\, \forall R\, (\forall a \in A\, \exists b \in A : \langle a,b\rangle \in R) \to \forall a \in A\, \exists f \in {}^{\omega}A\, (f(0) = a \wedge \forall n \in \omega : f(n)\, R\, f(n+1)).$$

De hecho, la solución del Ejercicio x4.4 en ZFC^- es la misma que la del Ejercicio x4.3, pero usando sólo DC es más elaborada.

5. Aritmética cardinal

Definición 5.1. Dados dos cardinales κ y λ, las operaciones básicas de la aritmética cardinal son:

1. $\kappa + \lambda := |\kappa \oplus \lambda|$.
2. $\kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|$.
3. (AC) $\kappa^{\lambda} := |{}^{\lambda}\kappa|$.

Sólo es necesario usar AC en la tercera definición, dado que la unión disjunta y el producto de conjuntos bien ordenables son bien ordenables.

Lema 5.2. *Si* $\kappa, \lambda \geq 2$ *entonces* $\text{máx}(\kappa, \lambda) \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$.

Demostración. Basta observar que

$$\kappa, \lambda \leqslant_c \kappa \oplus \lambda =_c \kappa \times \{0\} \cup \big((\{1\} \times \lambda \setminus \{\langle 1, 0\rangle\}) \cup \{\langle 0, 1\rangle\}\big) \subseteq \kappa \times \lambda. \qquad \square$$

5.1. Trivialidad de suma y producto

En esta sección probaremos que las operaciones de suma y producto de cardinales infinitos son triviales, puesto que siempre devuelven el argumento más grande. Esto se debe al siguiente

Teorema 5.3 (Hessenberg)**.** *Para todo cardinal infinito,* $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Antes de la prueba requeriremos un pequeño resultado.

Lema 5.4. *Sea* κ *un cardinal, y sea* $\langle A, R\rangle$ *un buen orden. Luego* $\text{tipo}(A; R) \leq \kappa$ *si y sólo si para todo* $a \in A$, $|a{\downarrow}| < \kappa$.

Demostración. Sea $f : A \to \text{tipo}(A)$ un (el) isomorfismo. La implicación directa es obvia puesto que vía f, $a{\downarrow}$ va biyectivamente sobre un ordinal menor que κ. Para la inversa, vemos la contrarrecíproca. Si $\text{tipo}(A) > \kappa$, entonces por el Corolario 1.22 existe $a \in A$ tal que $\kappa = \text{tipo}(a{\downarrow})$, luego $|a{\downarrow}| = \kappa \not< \kappa$. $\square$

Ejercicio 5.5. Si $\kappa \in \mathsf{Card}$ y $\alpha < \kappa$, entonces $\alpha + 1 < \kappa$. Ⓢ

Prueba del Teorema 5.3. La clave de este teorema está en definir un buen orden ligeramente distinto al lexicográfico en el producto, de manera de tener segmentos iniciales "cortos". Para ello, definimos para elementos del producto $\kappa \times \kappa$, $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \lhd \langle \beta_1, \beta_2\rangle$ si y sólo si

$$\text{máx}(\alpha_1, \alpha_2) < \text{máx}(\beta_1, \beta_2) \vee [\text{máx}(\alpha_1, \alpha_2) = \text{máx}(\beta_1, \beta_2) \wedge \langle \alpha_1, \alpha_2\rangle <_{lex} \langle \beta_1, \beta_2\rangle].$$

La primera condición, acoplada al orden lexicográfico, va a asegurar que el tipo de orden de $\langle \kappa \times \kappa, \lhd\rangle$ sea exactamente κ. Como claramente $\kappa \leqslant_c \kappa \times \kappa$, basta ver que $\text{tipo}(\kappa \times \kappa; \lhd) \leq \kappa$. Lo probaremos por inducción en κ (podemos hacerlo ya que Card está bien ordenada por $\in$).

Supongamos que para todo cardinal infinito $\lambda < \kappa$ se da el resultado. Por el Lema 5.4, basta ver que para todo $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \in \kappa \times \kappa$ se cumple que $|\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle{\downarrow}| < \kappa$. Pero $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle{\downarrow} \subseteq \alpha \times \alpha$ con $\alpha := \text{máx}(\alpha_1, \alpha_2) + 1$. Si α es finito entonces $\alpha \times \alpha$ también lo es, por lo tanto $|\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle{\downarrow}| \leq |\alpha \times \alpha| < \kappa$. Si α es infinito, aplicamos la hipótesis inductiva:

$$|\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle{\downarrow}| \leq |\alpha \times \alpha| = |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha| < \kappa,$$

donde la última desigualdad se sigue de que $\alpha < \kappa$ por el Ejercicio 5.5. $\square$

Es notable que este Teorema no utilice *AC*, pero el enunciado "$A \times A =_c A$ para todo A infinito" sea *equivalente* a *AC*. El siguiente teorema sí requiere *AC*.

Teorema 5.6 ([7, Theorem I.12.14])**.** *(ZFC*$^-$*) Sea* κ *un cardinal infinito. Si* $\mathscr{F}$ *es una familia de conjuntos con* $|\mathscr{F}| \leq \kappa$ *y* $|X| \leq \kappa$ *para todo* $X \in \mathscr{F}$*, entonces* $|\bigcup \mathscr{F}| \leq \kappa$. $\square$

5.2. Cofinalidad

Definición 5.7. Sea $\langle A, <\rangle$ totalmente ordenado. Diremos que $X \subseteq A$ es ***cofinal*** en A si $\forall a \in A\, \exists x \in X : a \leq x$. Una función con codominio A es ***cofinal en*** A si su imagen lo es.

Definición 5.8. Sea $\gamma \in \mathsf{Ord}$. La ***cofinalidad*** de γ es el menor tipo de un subconjunto cofinal:

$$\mathrm{cf}(\gamma) := \mathrm{mín}\{\mathrm{tipo}(X) : X \subseteq \gamma \wedge X \text{ es cofinal en } \gamma\}.$$

Observemos que si $X \subseteq \gamma \in \mathsf{Lim}$, X es cofinal en γ si y sólo si X no es acotado en γ, si y sólo si $\sup(X) = \gamma$. Además, si X es cofinal en γ con tipo $\mathrm{cf}(\gamma)$, el isomorfismo $j : \mathrm{cf}(\gamma) \to X$ es una función estrictamente creciente y cofinal en γ.

Ejercicio 5.9. Supongamos que X es cofinal en $\langle A, <\rangle$, y a su vez A es cofinal en γ. Probar que X es cofinal en γ.

Lema 5.10. *Sea $\gamma \in \mathsf{Lim}$ y supongamos que $f : \delta \to \gamma$ es cofinal. Entonces existe $g : \mathrm{cf}(\gamma) \to \delta$ estrictamente creciente tal que $f \circ g$ es estrictamente creciente y cofinal en γ. En particular, $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \delta$.*

Demostración. Sea $f : \delta \to \gamma$ como en las hipótesis, y supongamos que $j : \mathrm{cf}(\gamma) \to \gamma$ es estrictamente creciente y cofinal en γ. Por necesidad técnica, comenzaremos definiendo recursivamente $g : \mathrm{cf}(\gamma) \to \delta + 1$.

$$g(\alpha) := \begin{cases} \mathrm{mín} A_\alpha & \text{si } A_\alpha \neq \varnothing \\ \delta & \text{si } A_\alpha = \varnothing, \end{cases}$$

donde $A_\alpha := \{\theta < \delta : f(\theta) \geq j(\alpha) \wedge \forall \beta < \alpha (f(g(\beta)) < f(\theta))\}$. Notemos que por construcción tenemos lo siguiente:

(C) Si $\beta < \alpha$ y $g(\beta), g(\alpha) \neq \delta$, entonces $f(g(\beta)) < f(g(\alpha))$ y $g(\beta) < g(\alpha)$.

En efecto, $\beta < \alpha$ implica $A_\beta \supseteq A_\alpha$ y luego $\mathrm{mín} A_\beta \leq \mathrm{mín} A_\alpha$, con lo cual g es monótona. Por otro lado, la segunda condición en A_α implica que $f(g(\beta)) < f(g(\alpha))$ y luego $g(\beta) \neq g(\alpha)$.

Usando (C) se puede probar:

(D) $g(\alpha) \neq \delta$ para todo $\alpha < \mathrm{cf}\,\gamma$.

Para ello, supongamos que $g(\beta) \neq \delta$ para todo $\beta < \alpha$. Por (C), $f \circ g$ es estrictamente creciente de α en γ, luego $\mathrm{tipo}((f \circ g)[\alpha]) = \alpha < \mathrm{cf}(\gamma)$ y entonces debe haber un $\alpha_0 < \gamma$ tal que $\alpha_0 > \sup(f \circ g)[\alpha]$. Como f es cofinal, hay $\theta < \delta$ tal que $f(\theta) \geq \mathrm{máx}\{\alpha_0, j(\alpha)\}$. Luego $A_\alpha \neq \varnothing$ y concluimos que $g(\alpha) \neq \delta$.

Por (D), $f \circ g$ es un isomorfismo de $\mathrm{cf}(\gamma)$ sobre su imagen. Pero además es cofinal en γ: si $\xi < \gamma$, hay α tal que $j(\alpha) \geq \xi$ por ser j cofinal. Luego $f(g(\alpha)) \geq j(\alpha) \geq \xi$. ◻

Ejercicio 5.11. Sean $f : \alpha \to \gamma$ estrictamente creciente, y $g : \delta \to \alpha$ tal que $f \circ g$ es estrictamente creciente y cofinal. Entonces g es cofinal.

Lema 5.12. *Sea γ límite y $A \subseteq \gamma$ cofinal. Entonces* $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\mathrm{tipo}(A))$.

Demostración. Sea $f : \text{tipo}(A) \to A$ un isomorfismo; por hipótesis es cofinal en γ. Por el Lema 5.10, $\text{cf}(\gamma) \leq \text{tipo}(A)$ y existe $g : \text{cf}(\gamma) \to \text{tipo}(A)$ estrictamente creciente, tal que $f \circ g$ también lo es y además es cofinal en γ. Como f es estrictamente creciente, se sigue que g es cofinal en $\text{tipo}(A)$ por el Ejercicio 5.11, y en consecuencia, $g[\text{cf}(\gamma)]$ es cofinal de tipo $\text{cf}(\gamma)$ en $\text{tipo}(A)$, así que $\text{cf}(\text{tipo}(A)) \leq \text{cf}(\gamma)$.

Para ver la otra desigualdad, sea $h : \text{cf}(\text{tipo}(A)) \to \text{tipo}(A)$ cofinal. Usando el Ejercicio 5.9, como $f \circ h : \text{cf}(\text{tipo}(A)) \to A$ es cofinal A, entonces lo es en γ. Por último, aplicando el Lema 5.10 (el "En particular"), se tiene $\text{cf}(\gamma) \leq \text{cf}(\text{tipo}(A))$. ◻

Comentario. Ninguna de las dos desigualdades se puede probar sin hacer uso de la suposición de que A es cofinal en γ.

Definición 5.13. Diremos que $\gamma \in \mathsf{Ord}$ es ***regular*** si $\text{cf}(\gamma) = \gamma$, y ***singular*** en caso contrario.

Corolario 5.14. *Si* $\gamma \in \mathsf{Lim}$*, entonces* $\text{cf}(\text{cf}(\gamma)) = \text{cf}(\gamma)$. *Luego* $\text{cf}(\gamma)$ *siempre es regular.*

Demostración. Sea $A \subseteq \gamma$ cofinal en γ de tipo $\text{cf}(\gamma)$. Luego $\text{cf}(\gamma) = \text{cf}(\text{tipo}(A)) = \text{cf}(\text{cf}(\gamma))$. ◻

Teorema 5.15. *Sea* γ *un ordinal límite.*

1. $\text{cf}(\gamma) \leq |\gamma|$.

2. Si γ *es regular, entonces es un cardinal.*

3. (AC) Todo cardinal sucesor es regular.

4. Si $\gamma \in \mathsf{Lim}$*,* $\text{cf}(\aleph_\gamma) = \text{cf}(\gamma)$.

Demostración. 1. Cualquier suryección $f : |\gamma| \to \gamma$ es cofinal en γ. Aplicar el Lema 5.10.

2. Si γ es regular, $\text{cf}(\gamma) \leq |\gamma| \leq \gamma = \text{cf}(\gamma)$.

3. Sea $\kappa \in \mathsf{Card}$. Probemos que κ^+ es regular. Probemos que una familia $\mathscr{F} \subseteq \kappa^+$ con $|\mathscr{F}| < \kappa^+$ no puede ser cofinal. Como $\mathscr{F} \subseteq \kappa^+$, tenemos que $|\mathscr{F}| \leq \kappa$; asimismo, para todo $\alpha \in \mathscr{F}$, $|\alpha| \leq \kappa$. Si $\mathscr{F}$ fuera cofinal en κ^+, tendríamos

$$\kappa^+ = \sup \mathscr{F} = \bigcup \mathscr{F},$$

pero esto contradice el Teorema 5.6.

4. El conjunto $A := \{\aleph_\alpha : \alpha < \gamma\}$ tiene tipo γ y es cofinal en $\aleph_\gamma$. Luego $\text{cf}(\aleph_\gamma) = \text{cf}(\text{tipo}(A)) = \text{cf}(\gamma)$ por el Lema 5.12. ◻

En el siguiente resultado, expresamos una de las caracterizaciones más útiles de la cofinalidad de un cardinal θ: es el menor tamaño de una familia de subconjuntos de θ, todos de cardinal menor que θ, tal que su unión nos da θ. El símbolo $[A]^{<\theta}$ denotará el conjunto de partes de A de tamaño menor que θ.

Teorema 5.16. *(AC) Sea* θ *un cardinal infinito. Entonces*

$$\text{cf}(\theta) = \text{mín}\big\{\kappa : \exists \mathscr{F} \subseteq [\theta]^{<\theta} \big(|\mathscr{F}| = \kappa \wedge \bigcup \mathscr{F} = \theta\big)\big\}.$$

Demostración. Vemos las dos desigualdades.

($\geq$) Sea $X \subseteq \theta$ cofinal con tipo $\mathrm{cf}(\theta)$. Luego la familia $\mathscr{F} := \{[0,\alpha) : \alpha \in X\} = X$ cumple con el requerimiento.

($\leq$) Veremos que si $\mathscr{F} \subseteq [\theta]^{<\theta}$ tiene cardinal menor que $\mathrm{cf}(\gamma)$, entonces su unión no puede ser θ.

Sea entonces una tal $\mathscr{F}$. Tomemos $X := \{|S| : S \in \mathscr{F}\} \subseteq \theta$. Como $|X| \leq |\mathscr{F}| < \mathrm{cf}(\theta)$, X es acotado en θ. Sea ahora $\kappa := \text{máx}(\sup(X), |\mathscr{F}|) < \theta$. Si κ es finito, entonces $\bigcup \mathscr{F}$ es finito. Si κ es infinito, $|\bigcup \mathscr{F}| \leq \kappa$ por el Teorema 5.6. En cualquiera de los dos casos, $\bigcup \mathscr{F} \neq \theta$. ⊥

El siguiente resultado de Gyula (o Julius) König nos da una de las pocas herramientas que tenemos en *ZFC*, aparte del Teorema de Cantor $X <_c \mathscr{P}(X)$, para probar desigualdades estrictas entre cardinales. Notablemente, König fue a la vez contribuyente y opositor a la Teoría de Conjuntos. Todo parecido con la realidad política, es mera coincidencia.

Teorema 5.17 (König)**.** *Si* $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$*, entonces* $\kappa^\lambda > \kappa$*.*

Demostración. Sea $f : \lambda \to \kappa$ cofinal, y sea $G : \kappa \to {}^\lambda\kappa$; probemos que G no puede ser sobre. Para ello, definamos $h : \lambda \to \kappa$:

$$h(\alpha) := \text{mín}\big(\kappa \setminus \{G(\mu)(\alpha) : \mu < f(\alpha)\}\big)$$

De hecho, h está bien definida puesto que $|\{G(\mu)(\alpha) : \mu < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa$ y entonces el conjunto es no vacío. Ahora, $h \notin \operatorname{img} G$. Por el absurdo, supongamos que hay $\nu \in \kappa$ tal que $G(\nu) = h$. Tomemos, usando la cofinalidad de f, un $\alpha < \lambda$ tal que $f(\alpha) > \nu$; pero rápidamente llegamos a un absurdo:

$$G(\nu)(\alpha) = h(\alpha) \in \kappa \setminus \{G(\mu)(\alpha) : \mu < f(\alpha)\} \not\ni G(\nu)(\alpha).$$ ⊥

Corolario 5.18. *Para todo* $\kappa \geq 2$ *y* λ *infinito, se tiene* $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$*.*

De este corolario se puede recuperar fácilmente el Teorema 5.17.

Ninguna de las dos versiones es (según la opinión del autor) tan fácil de recordar y bonita como la que utiliza ***sumas*** y ***productos infinitos*** de cardinales. Éstos se definen de la manera obvia: si κ_i ($i \in I$) son cardinales, definamos

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \Big|\bigcup\big\{\{i\} \times \kappa_i : i \in I\big\}\Big|, \qquad \prod_{i\in I} \kappa_i := |\{f \text{ función} : \mathrm{dom}(f) = I \wedge \forall i(f(i) \in \kappa_i)\}|.$$

Luego la versión "mnemotécnica" del Teorema 5.17 es la siguiente: *si para todo* $i \in I$*,* $\theta_i < \kappa_i$*, entonces* $\sum_{i\in I} \theta_i < \prod_{i\in I} \kappa_i$. Nuevamente, de esta versión también se puede obtener la primera de manera más o menos directa.

A pesar de las observaciones estéticas del párrafo anterior, el Corolario 5.18 tiene una consecuencia inmediata de suma importancia:

(K) el cardinal $2^{\aleph_0}$ de los reales no tiene cofinalidad contable.

Sabemos que la unión de conjuntos contables es contable, pero la afirmación (K) es más poderosa: los reales no pueden ser unión contable de conjuntos con cardinal $< 2^{\aleph_0}$. Por supuesto, bajo la ***Hipótesis del Continuo*** *(CH)* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ambas afirmaciones son equivalentes, pero en general (K) nos da más información.

Introduciremos aquí la primera definición de "cardinal grande" que nos encontraremos.

Definición 5.19. Un cardinal κ es

1. ***límite en sentido fuerte*** si para todo cardinal λ, $\lambda < \kappa$ implica $2^\lambda < \kappa$;

2. ***débilmente inaccesible*** si es un cardinal límite regular; e

3. ***inaccesible*** si es regular y límite en sentido fuerte.

Es decir, los cardinales inaccesibles combinan de manera perversa dos propiedades de clausura: su tamaño no puede ser alcanzado por la operación de tomar partes de cosas más pequeñas, ni por uniones en cantidad menor de cosas más pequeñas. La perversión de esta definición es que su existencia no puede ser probada en *ZFC*. Por su parte, aunque la existencia de los cardinales débilmente inaccesibles tampoco puede ser probada en *ZFC*, es posible que incluso $2^{\aleph_0}$ sea uno de ellos.

5.3. Ejercicios

En los siguientes ejercicios, κ, λ, ν, θ denotarán cardinales. Además, denotaremos con $[A]^\lambda$ el conjunto de partes de A de tamaño λ.

x5.1. Probar que si $\lambda \leq \kappa$ son infinitos, $\left|[\kappa]^\lambda\right| = \kappa^\lambda$.

x5.2. Probar que ε_0 es contable (a pesar de ser muy grande).

x5.3. Dar ejemplos de $\gamma \in \mathsf{Lim}$ y $A \subseteq \gamma$ tales $\mathrm{cf}(\mathrm{tipo}(A)) < \mathrm{cf}(\gamma)$ y $\mathrm{cf}(\mathrm{tipo}(A)) > \mathrm{cf}(\gamma)$.

x5.4. Probar que hay un α tal que $\alpha = \aleph_\alpha$. Probar que el menor α así cumple con $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$.

x5.5. Probar el Corolario 5.18.

x5.6. Probar que $\sum_{i\in\lambda} 1 = \lambda$ y $\prod_{i\in\lambda} 2 = 2^\lambda$.

x5.7. Probar que si λ es infinito y $\kappa_i > 0$ para cada $i \in \lambda$, $\sum_{i\in\lambda} \kappa_i = \lambda \cdot \sup_{i\in\lambda} \kappa_i$. ⫫

x5.8. Supongamos que λ es infinito y $\{\kappa_i\}_{i\in\lambda}$ es creciente, con $\kappa_i > 0$. Probar que $\prod_{i\in\lambda} \kappa_i = (\sup_{i\in\lambda} \kappa_i)^\lambda$. ⫫

x5.9. Probar que si para todo $i \in I$, $\theta_i < \kappa_i$, entonces $\sum_{i\in I} \theta_i < \prod_{i\in I} \kappa_i$. Usando x5.6 recuperamos el Teorema de Cantor (Ej. x0.6). ⫫

5.4. Cardinales de otras construcciones

Definición 5.20. Sean $\delta, \theta \in \mathsf{Ord}$ y B un conjunto.

1. Una ***operación δ-aria*** sobre B es una función $f : {}^{\delta}B \to B$.
2. Diremos que f es una operación ***$<\theta$-aria*** si es δ-aria para algún $\delta < \theta$.
3. Una operación es ***finitaria*** si es $<\omega$-aria.

Dado un conjunto $\mathscr{F}$ de operaciones $<\theta$-arias sobre B y $S \subseteq B$, la ***clausura de S por $\mathscr{F}$*** es:

$$\bigcap\{X : S \subseteq X \subseteq B \wedge \forall\delta\forall f \in \mathscr{F}\ \delta\text{-aria},\ f[{}^{\delta}X] \subseteq X\},$$

esto es, el menor subconjunto de B que contiene a X y es ***cerrado*** por las operaciones de $\mathscr{F}$. En Álgebra Universal se diría que es la subálgebra de $\langle B, \mathscr{F}\rangle$ generada por X.

Lema 5.21. *Sea θ regular, y sea $\mathscr{F}$ una familia de operaciones $<\theta$-arias sobre B, y sea $S \subseteq B$. Definamos S_ξ recursivamente:*

1. $S_0 = S$.
2. $S_\eta = \bigcup\{S_\xi : \xi < \eta\}$ *cuando* $\eta \in \mathsf{Lim}$.
3. $S_{\xi+1} = S_\xi \cup \{f(\bar{x}) : f \in \mathscr{F} \wedge f$ *es α-aria* $\wedge \bar{x} \in {}^{\alpha}S_\xi\}$.

Entonces S_θ es la clausura de S bajo $\mathscr{F}$.

Demostración. Es fácil ver que la clausura de S contiene a todos los S_ξ. Veamos la otra inclusión.

Sea $f \in \mathscr{F}$ α-aria con $\alpha < \theta$ y sea $\bar{x} = \{x_\beta\}_{\beta<\alpha} \in {}^{\alpha}S_\theta$. Tomemos $i_\beta := \min\{\xi < \theta : x_\beta \in S_\xi\}$. Luego $\{i_\beta : \beta < \alpha\}$ no es cofinal en θ. En conclusión, hay ξ tal que $i_\beta < \xi$ para todo $\beta < \alpha$; dicho de otro modo, $x_\beta \in S_\xi$ para todo $\beta < \alpha$. En conclusión, $f(\bar{x}) \in S_{\xi+1} \subseteq S_\theta$. ⫫

Definición 5.22.
1. Usaremos ${}^{<\theta}B$ para denotar el conjunto $\bigcup\{{}^{\delta}B : \delta < \theta\}$ de las sucesiones de elementos de B de longitud menor a θ.
2. Si κ y λ son cardinales, $\kappa^{<\lambda}$ denotará el cardinal de ${}^{<\lambda}\kappa$.

Ejercicio 5.23. Si θ es regular y $\kappa \in \mathsf{Card}$, $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} = \kappa^{<\theta}$. Ⓢ

Lema 5.24. *Sean dados:*

1. $\theta, \kappa \in \mathsf{Card}$ *con θ regular;*
2. *dos conjuntos $S \subseteq B$, con $|S| \leq \kappa$; y*
3. *una familia $\mathscr{F}$ de operaciones $<\theta$-arias sobre B con $|\mathscr{F}| \leq \kappa$.*

Entonces la clausura de S por $\mathscr{F}$ tiene cardinal a lo sumo $\kappa^{<\theta}$.

Demostración. Utilicemos la expresión de la clausura dada por el Lema 5.21. Probaremos por inducción que para todo $\alpha < \theta$, $|S_\alpha| \leq \kappa^{<\theta}$.

Por hipótesis tenemos que $|S_0| = |S| \leq \kappa \leq \kappa^{<\theta}$ por ser $\theta > 1$. Si $\xi < \theta$, el conjunto $D := \{f(\bar{x}) : f \in \mathscr{F} \wedge f \text{ es } \alpha\text{-aria } \wedge \bar{x} \in {}^{\alpha}S_\xi\}$ tiene cardinal acotado por $\left|\mathscr{F} \times {}^{<\theta}S_\xi\right|$, así que tenemos:

$$
\begin{aligned}
\left|S_{\xi+1}\right| &= \left|S_\xi \cup D\right| && \text{definición de } S_{\xi+1} \\
&\leq \left|S_\xi\right| + |D| && \text{se inyecta en la unión disjunta} \\
&\leq \left|S_\xi\right| + \left|\mathscr{F} \times {}^{<\theta}S_\xi\right| && \text{es cota} \\
&\leq \kappa^{<\theta} + \kappa \cdot (\kappa^{<\theta})^{<\theta} && \text{hipótesis inductiva} \\
&= \kappa^{<\theta} && \text{por el Ejercicio 5.23.}
\end{aligned}
$$

Si $\eta < \theta$ es límite,

$$\left|S_\eta\right| = \left|\bigcup\{S_\alpha : \alpha < \eta\}\right| \leq |\eta| \cdot \kappa^{<\theta} = \kappa^{<\theta}, \tag{5}$$

puesto que $\kappa^{<\theta} \geq \kappa^{|\eta|} > |\eta|$.

Notemos que este último cálculo implica que si λ es un cardinal infinito menor que θ, entonces $\kappa^{<\theta} > \lambda$. Por ende, $\kappa^{<\theta} \geq \theta$ y utilizando la Ecuación (5) para $\eta = \theta$ obtenemos el resultado. ⫫

Lema 5.25. *Si* $\kappa, \lambda \in \mathsf{Card}$*,* $\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta \textit{ cardinal}\}$.

Demostración. Este lema está probado en detalle en Kunen [7, Lemma I.13.17]. Veamos una prueba alternativa usando sumatoria de cardinales.

$$\left|{}^{<\lambda}\kappa\right| = \sum_{\theta<\lambda} \left|{}^{\theta}\kappa\right| = \sum_{\theta<\lambda} \kappa^{|\theta|},$$

puesto que ${}^{<\lambda}\kappa$ la unión disjunta de los ${}^{\theta}\kappa$ con $\theta < \lambda$. Por el Ejercicio x5.7, esta última expresión es igual a $\lambda \cdot \rho$, donde $\rho := \sup_{\theta<\lambda} \kappa^{|\theta|}$. Pero $\rho \geq \lambda$: si $\kappa \geq 2$, tenemos que $\kappa^\theta \geq 2^\theta \geq \theta^+$, y luego

$$\rho = \sup\{\kappa^\theta : \theta < \lambda \wedge \theta \text{ cardinal}\} \geq \sup\{\theta^+ : \theta < \lambda \wedge \theta \text{ cardinal}\} = \lambda.$$

En conclusión, $\left|{}^{<\lambda}\kappa\right| = \lambda \cdot \rho = \rho = \sup_{\theta<\lambda} \kappa^{|\theta|}$, que era lo que queríamos probar. ⫫

Ejercicio 5.26. Existen exactamente $2^{\aleph_0}$ subconjuntos Borel de $\mathbb{R}$. Ⓢ

6. El Axioma de Martin

Esta sección sigue en detalle las notas de J. Palumbo [9].

6.1. Características Cardinales del Continuo

Los axiomas de *ZFC* no determinan en qué posición de la "recta cardinal" está el conjunto de los números reales (también denominado el ***continuo***). Como dijimos anteriormente, lo más preciso que podemos afirmar es que su cardinal es mayor que $\aleph_0$ y tiene cofinalidad no numerable.

De hecho, decir "el" conjunto $\mathbb{R}$ es un poco arriesgado, dado que para cada modelo M de la teoría *ZFC*, le corresponderá una versión propia $\mathbb{R}^M$ de dicho conjunto (cf. Secciones 11ff). Para tener un análisis más acabado de $\mathbb{R}$, podemos buscar "invariantes" que den alguna información extra de su estructura. El más importante, por supuesto, es su cardinal, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

Los invariantes que veremos se llaman ***características cardinales del continuo***, y estarán entre $\aleph_1$ y $\mathfrak{c}$; para diferentes modelos de *ZFC*, sus valores pueden variar. Estos cardinales se obtienen estudiando familias de conjuntos o funciones relacionados canónicamente con $\mathbb{R}$ como $\mathscr{P}(\omega)$, ${}^{\omega}\omega$ ó ${}^{\omega}2$. En teoría de conjuntos, muchas veces se denomina ***reales*** a los elementos de cualquiera de estos últimos.

6.1.1. Dominación de funciones

Definición 6.1. Sean $f, g \in {}^{\omega}\omega$. Decimos que g ***domina a*** f, $f <^* g$ si $\exists n_0 \in \omega \forall n \geq n_0 : f(n) < g(n)$.

Es decir, si g domina a f entonces es "casi siempre mayor". En general, también se pueden definir $\leq^*$, $=^*$, y resulta que $f <^* g \leftrightarrow f \leq^* g \wedge f(\neq)^* g$. Notar que $(\neq)^*$ no es la negación de $=^*$.

Es fácil ver que toda familia finita de funciones $\{f_i : i < k\}$ está ***acotada***, es decir, se puede dominar: basta tomar $g(n) := \max\{f_i(n) : i < k\} + 1$. Por otro lado, el orden $<^*$ sobre ${}^{\omega}\omega$ es mucho más interesante que el orden $<$ punto a punto. De hecho, una diferencia es la siguiente:

Proposición 6.2. *Toda familia numerable $\{f_i : i < \omega\} \subseteq {}^{\omega}\omega$ está acotada.*

Demostración. El argumento es una diagonalización: $g(n) := \max\{f_i(n) : i < n\} + 1$. ⊥⊥

Esto nos lleva a preguntarnos, ¿cuántas funciones pueden dominarse a la vez?

Definición 6.3. El ***número de acotación*** es el menor cardinal de una familia no acotada:

$$\mathfrak{b} := \min\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \subseteq {}^{\omega}\omega \wedge \forall g \in {}^{\omega}\omega \; g \text{ no domina a } \mathscr{F}\}.$$

Dado que ${}^{\omega}\omega$ no se puede dominar, es inmediato que

Proposición 6.4. $\aleph_0 < \mathfrak{b} \leq 2^{\aleph_0}$.

Observemos que *CH* implica $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

6.1.2. Familias casi disjuntas

La segunda característica que introduciremos surge de considerar "casi particiones" de ω.

Definición 6.5.
1. Sean $A, B \subseteq \omega$. A y B son ***casi disjuntos*** si $|A \cap B| < \aleph_0$.
2. Una familia de conjuntos es ***casi disjunta*** si sus elementos son casi disjuntos dos a dos.
3. $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^{\omega}$ es ***casi disjunta maximal*** o ***loca***[5] si es infinita, casi disjunta y es maximal (según inclusión) con esa propiedad.

Luego, si $\mathscr{F}$ es loca y $X \in [\omega]^{\omega}$, hay $A \in \mathscr{F}$ tal que $A \cap X$ es infinito.

Lema 6.6. *No hay familias locas numerables.*

[5] Por "mad", *maximal almost disjoint*.

Demostración. Observemos que

(∇) si $\mathscr{F} \subseteq [\omega]^\omega$ es casi disjunta y $A_0, \ldots, A_{n+1} \in \mathscr{F}$ entonces $A_{n+1} \smallsetminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n)$ es cofinita en A_{n+1}.

Para verlo, usemos que $A \smallsetminus B = A \smallsetminus (A \cap B)$:

$$\begin{aligned} A_{n+1} \smallsetminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n) &= A_{n+1} \smallsetminus (A_{n+1} \cap (A_0 \cup \cdots \cup A_n)) \\ &= A_{n+1} \smallsetminus ((A_{n+1} \cap A_0) \cup \cdots \cup (A_{n+1} \cap A_n)), \end{aligned}$$

donde la unión es finita.

Supongamos ahora que $\{A_k : k \in \omega\}$ es loca. Construiremos recursivamente $B \subseteq \omega$ que sea casi disjunto de todos los A_k. Sea $b_0 \in A_0$ arbitrario. Suponiendo $b_0, \ldots, b_n$ ya elegidos, sea $b_{n+1} \in A_{n+1} \smallsetminus (A_0 \cup \cdots \cup A_n)$ tal que $b_{n+1} > b_0, \ldots, b_n$ (es posible por (∇)). $B = \{b_n : n \in \omega\}$ es infinito, y $B \cap A_n \subseteq \{b_k : k \leq n\}$ (puesto que por construcción, $b_k \notin A_n$ para todo $k > n$). ⫫

Aunque parezca, este lema no requiere ninguna forma de AC.

Ejercicio 6.7. Hay una familia casi disjunta de ω de tamaño $2^{\aleph_0}$. Usando el Principio Maximal de Hausdorff, hay familias locas de ese tamaño.

Luego, podemos definir

$$\mathfrak{a} := \text{mín}\{|\mathscr{F}| : \mathscr{F} \text{ es loca}\},$$

y concluimos que $\aleph_0 < \mathfrak{a} \leq 2^{\aleph_0}$.

Teorema 6.8 (Solomon). $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$.

Demostración. Sea $\kappa < \mathfrak{b}$. Veremos que ninguna familia casi disjunta de tamaño κ puede ser maximal.

Sea $\mathscr{F} = \{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Por la observación ($\nabla$), podemos suponer que $\{A_\alpha : \alpha < \omega\}$ son disjuntos dos a dos. Enumeramos cada A_n ($n \in \omega$) de manera creciente: $A_n = \{a_m^{(n)} : m \in \omega\}$, con $a_m^{(n)} < a_{m+1}^{(n)}$ para todo m y definamos, para $\omega \leq \alpha < \kappa$,

$$f_\alpha(n) := \text{mín}\{m : A_n \cap A_\alpha < a_m^{(n)}\}.$$

En la Figura 1 se ve cómo se definen estas funciones. Los conjuntos A_n con $n < \omega$ están dispuestos verticalmente, y son cortados "transversalmente" por los A_α con $\alpha \geq \omega$ (en líneas punteadas). Esta terminología tiene sentido porque cada intersección $A_n \cap A_\alpha$ es finita. Luego, el valor de $f_\alpha(n)$ es el índice del menor elemento de A_n que acota estrictamente a dicha intersección. En el ejemplo, tenemos los valores indicados en la Tabla 1. Prosiguiendo con el argumento, tenemos una familia de $\kappa < \mathfrak{b}$ funciones, así que hay una $f : \omega \to \omega$ que las domina a todas. Definamos entonces $B := \{a_{f(n)}^{(n)} : n \in \omega\}$; por construcción, $A_n \cap B = \{a_{f(n)}^{(n)}\}$. Veremos que B es casi disjunto de todos los A_α.

Sea $\alpha \geq \omega$. Como $f_\alpha <^* f$, existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$, $f_\alpha(n) < f(n)$. Esto implica que

$$a_{f_\alpha(n)}^{(n)} < a_{f(n)}^{(n)} \in A_n.$$

Como $a_{f_\alpha(n)}^{(n)}$ es cota superior de $A_n \cap A_\alpha$, concluimos que $a_{f(n)}^{(n)} \notin A_\alpha$. Luego

$$A_\alpha \cap B \subseteq \{a_{f(m)}^{(m)} : m < n_0\}.$$ ⫫

n	0	1	2	3	...
f_ω	2	2	4	6	...
$f_{\omega+1}$	5	4	3	2	...

Tabla 1: Funciones asociadas a una familia casi disjunta.

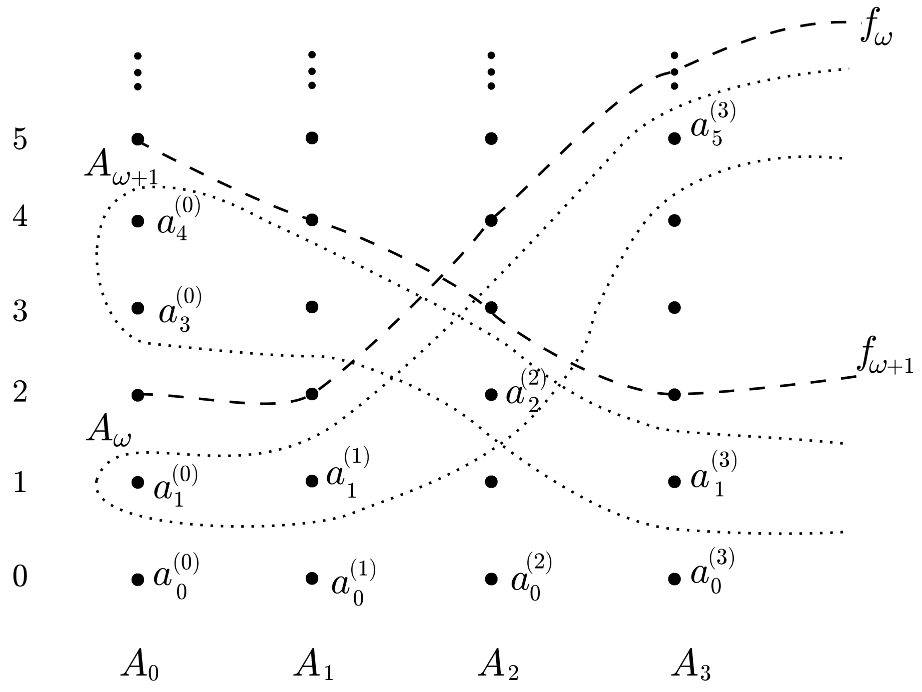


Figura 1: Las funciones f_α para $\omega \leq \alpha < \kappa$.

6.2. Ejercicios

Definición 6.9. Una familia $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ ***parte*** si para que cada $X \subseteq \omega$ infinito hay un $A \in \mathscr{F}$ tal que $|X \cap A| = |X \setminus A| = \aleph_0$. El ***número de partición*** $\mathfrak{s}$ es el menor cardinal de una familia que parte.

x6.1. Probar que $\aleph_0 < \mathfrak{s} \leq 2^{\aleph_0}$.

x6.2. Probar que el cardinal de acotación $\mathfrak{b}$ es regular.

x6.3. Dar un ejemplo de poset en cual las anticadenas son exactamente las familias casi disjuntas de subconjuntos de ω.

Diremos que A está ***casi incluido*** en B, y escribiremos $A \subseteq^* B$, si $A \setminus B$ es finito. El ***número de torre*** $\mathfrak{t}$ es la menor longitud α de una sucesión $\{A_\beta\}_{\beta<\alpha}$ tal que

1. $A_\beta \subseteq \omega$ y son distintos dos a dos, para todo $\beta < \alpha$;
2. $A_\gamma \subseteq^* A_\beta$ para todo $\beta < \gamma < \alpha$; y
3. no hay $A_\alpha \subseteq \omega$ de manera que $\{A_\beta\}_{\beta\leq\alpha}$ cumpla con las propiedades anteriores.

x6.4. Probar que $\mathfrak{t}$ es un cardinal regular y que $\aleph_0 < \mathfrak{t} \leq 2^{\aleph_0}$.

6.3. Nociones de Forzamiento y el Axioma de Martin

Sea $\langle \mathbb{P}, \leq, \mathbb{1} \rangle$ un poset con máximo $\mathbb{1}$. Le llamaremos ***noción de forzamiento*** y sus elementos serán llamados ***condiciones***. Si $p \leq q$, diremos que p ***extiende a*** q o que p ***es más fuerte que*** q.

Definición 6.10. $p, q \in \mathbb{P}$ son ***compatibles*** si existe $r \in \mathbb{P}$ tal que $r \leq p$ y $r \leq q$. En caso contrario, les llamaremos, bueno, ***incompatibles***, y lo denotaremos con $p \perp q$.

Ejemplo 6.11. Sean I, J conjuntos con $|I| \geq \aleph_0$. Entonces $\mathrm{Fn}(I, J)$ es el poset de las funciones finitas p tal que $\mathrm{dom}\, p \subseteq I$, $\mathrm{img}\, p \subseteq J$, ordenadas por $\supseteq$; $\mathbb{1}^{\mathrm{Fn}(I,J)} = \varnothing$. Dos elementos son compatibles si coinciden en la intersección de sus dominios.

Una noción de forzamiento se puede utilizar para construir un objeto mediante aproximaciones finitas. Supongamos que queremos construir una $f : I \to J$; como aproximaciones tomaremos el poset $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(I, J)$. Asociemos al elemento $p \in \mathbb{P}$ la "condición" $p \subseteq f$ (de ahí tal nombre). En ese sentido, p nos da un fragmento finito de información sobre f. Por ejemplo, si $I = J = \omega$ y $p = \{\langle 0, 1 \rangle\}$, $p \subseteq f$ nos dice simplemente que $f(0) = 1$. Y cuanto más fuerte es una condición, más información nos da:

$$p \leq q \text{ implica } p \subseteq f \to q \subseteq f.$$

Otras propiedades de la función f no son de la forma $p \subseteq f$. Si nuestro objetivo es obtener una función *total*, necesitamos asegurar que para cada $i \in I$, i esté en el dominio de f. Esta propiedad involucra el conjunto de condiciones $D_i := \{p \in \mathbb{P} : i \in \mathrm{dom}\, p\}$. Es posible que no sepamos de antemano qué valor nos conviene que tenga f en i, así que desearíamos poder asegurar que sin importar qué información (finita) imponemos sobre f, en algún momento podremos cumplir con el requisito que $i \in \mathrm{dom}\, f$. Esto motiva la siguiente

Definición 6.12. Sea $\mathbb{P}$ un poset. $D \subseteq \mathbb{P}$ es ***denso*** si para para todo $q \in \mathbb{P}$ existe $p \in D$ tal que $p \leq q$.

Es decir, si D es denso y tenemos una aproximación q a f, entonces podemos conseguir una aproximación más precisa (una condición más fuerte) que además está en D. Los conjuntos D_i de arriba son densos.

Por otro lado, sea $G := [f]^{<\omega} \subseteq \mathbb{P}$. G es la descripción completa de f en $\mathbb{P}$. Podemos observar que G cumple con las siguientes propiedades:

1. si $p \in G$ y $p \leq q$ entonces $q \in G$ (es ***creciente***)
2. si $p, q \in G$, entonces hay $r \in G$ tal que $r \leq p, q$ (p y q son ***compatibles en*** G).

Un subconjunto no vacío de un poset que satisface ambas condiciones se denomina ***filtro*** **en** $\mathbb{P}$. Todo filtro G en $\mathrm{Fn}(I, J)$ define una función parcial $\bigcup G$. Pero para que esté definida en todo I necesitamos que corte a cada conjunto D_i.

Definición 6.13. Sea $\mathcal{D}$ una familia de conjuntos densos de $\mathbb{P}$. Un filtro G de $\mathbb{P}$ es $\mathcal{D}$***-genérico para*** $\mathbb{P}$ si para todo $D \in \mathcal{D}$, $D \cap G \neq \varnothing$.

Ejemplo 6.14. Sean $E_j := \{p \in \mathrm{Fn}(I,J) : j \in \operatorname{img} p\}$ para cada $j \in J$. Estos conjuntos son densos en $\mathrm{Fn}(I,J)$. Si $\mathscr{D} := \{D_i : i \in I\} \cup \{E_j : j \in J\}$, un filtro $\mathscr{D}$-genérico es exactamente (las partes finitas de) una función $f : I \to J$ sobre.

Siempre que tengamos una cantidad numerable de conjuntos densos, va a haber un filtro que los corte a todos:

Teorema 6.15 (Rasiowa-Sikorski)**.** *Si $\mathbb{P}$ es un poset, $\mathscr{D}$ es una familia contable de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ y $p \in \mathbb{P}$, hay un filtro $\mathscr{D}$-genérico G tal que $p \in G$.*

Demostración. Sea $\mathscr{D} = \{D_n : n \in \omega\}$. Tomo $p_0 \in D_0$ tal que $p_0 \leq p$. Recursivamente elegimos $p_{n+1} \in D_{n+1}$ tal que $p_{n+1} \leq p_n$. Luego $G := \{q \in \mathbb{P} : \exists n(p_n \leq q)\}$ cumple con lo requerido.

Esta prueba se puede formalizar utilizando la versión fuerte de *DC* (Ejercicio x4.4). Queda como ejercicio. ∎

Definición 6.16.

1. $A \subseteq \mathbb{P}$ es una ***anticadena*** si sus elementos son incompatibles dos a dos.
2. $\mathbb{P}$ satisface la ***condición de cadenas contables*** o bien "es ***ccc***" si toda anticadena en $\mathbb{P}$ es contable.

Ejemplo 6.17. En el poset $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ consideremos $\mathscr{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_j : \alpha \in \omega_1\}$. No puede existir un filtro $\mathscr{D}$-genérico puesto que sería una función sobreyectiva de ω en ω_1. Notemos que en $\mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$ hay una anticadena no numerable: $\{\{\langle 0, \alpha\rangle\} : \alpha < \omega_1\}$.

Si no hubiera tal anticadena, aún podría existir un filtro genérico.

Definición 6.18. Sea $\kappa \in \mathsf{Card}$. $MA(\kappa)$ es el enunciado: para todo poset $\mathbb{P}$ ccc y una familia $\mathscr{D}$ de densos en $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, hay un filtro $\mathscr{D}$-genérico para $\mathbb{P}$.

El Ejemplo 6.17 muestra que $MA(\aleph_1)$ no vale si uno no pide la condición de cadenas contables. Por otro lado, $MA(\aleph_0)$ vale para cualquier poset $\mathbb{P}$ por el Teorema 6.15.

Lema 6.19. *$MA(\kappa)$ implica $\kappa < 2^{\aleph_0}$.*

Demostración. Sea $\mathbb{P} := \mathrm{Fn}(\omega, \omega)$; este poset es ccc puesto que es contable. Sean $f_\alpha : \omega \to \omega$ ($\alpha < \kappa$) funciones; veremos que hay una función distinta a todas ellas. Definamos $H_\alpha := \{p \in \mathbb{P} : \exists n\, p(n) \neq f_\alpha(n)\}$; es fácil ver que son densos. Sea ahora $\mathscr{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{H_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Luego $|\mathscr{D}| = \kappa$, así que por $MA(\kappa)$ debe existir un filtro $\mathscr{D}$-genérico G para $\mathbb{P}$. Como antes, $f := \bigcup G$ es una función de ω en ω. Basta ver que para todo $\alpha < \kappa$, $f \neq f_\alpha$.

Para ello, fijemos α. Como G es $\mathscr{D}$-genérico, hay un $p \in G \cap H_\alpha$. Luego hay $n \in \omega$ tal que $p(n) \neq f_\alpha(n)$. Como $p \subseteq f$, $f(n) \neq f_\alpha(n)$, y en conclusión $f \neq f_\alpha$. ∎

El ***Axioma de Martin*** es el enunciado:

(*MA*) Para todo $\kappa < 2^{\aleph_0}$, se da $MA(\kappa)$.

Luego *CH* implica *MA*. El Axioma de Martin tiene consecuencias interesantes para las características cardinales del continuo, como veremos a continuación.

6.4. Ejercicios

x6.5. Sea I infinito, y sean $i \in I$ y $j \in J$. Probar que $D_i := \{p \in \mathrm{Fn}(I,J) : i \in \operatorname{dom} p\}$ y $E_j := \{p \in \mathrm{Fn}(I,J) : j \in \operatorname{img} p\}$ son densos en $\mathrm{Fn}(I,J)$.

Un subconjunto A de un poset $\mathbf{P}$ es ***abierto*** si es decreciente, i.e., $x \leq y \in A$ implica $x \in A$.

x6.6. $MA(\kappa)$ es equivalente a:

> Para cada poset ccc $\mathbf{P}$ y una colección $\mathscr{D}$ de abiertos densos de $\mathbf{P}$ con $|\mathscr{D}| \leq \kappa$, hay un filtro G que corta a cada miembro de $\mathscr{D}$.

Una anticadena $A \subseteq \mathbf{P}$ es ***maximal*** si para todo $p \in \mathbf{P}$ hay un $q \in A$ tal que p y q son compatibles.

x6.7. Probar que toda anticadena está incluida en una maximal.

x6.8. $MA(\kappa)$ es equivalente a:

> Para cada poset ccc $\mathbf{P}$ y una colección $\mathscr{A}$ de anticadenas maximales de $\mathbf{P}$ con $|\mathscr{A}| \leq \kappa$, hay un filtro G que corta a cada miembro de $\mathscr{A}$.

x6.9. Pruebe que la topología de $\mathbb{R}$ (excluyendo $\varnothing$) con la inclusión forman un poset ccc. Generalice para $\mathbb{R}^n$.

6.5. Algunas aplicaciones del Axioma de Martin

Aunque *CH* tiene como consecuencia trivial a *MA*, este último es consistente con que $\mathfrak{c}$ sea arbitrariamente grande; de todos modos tiene un impacto grande en las características cardinales que definimos.

Teorema 6.20. *$MA(\kappa)$ implica $\kappa < \mathfrak{b}$.*

Demostración. Sea $\mathscr{F} = \{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ una familia de funciones de ω en ω. Queremos una $f : \omega \to \omega$ que las domine a todas. Sea $\mathbb{P}_b$ el conjunto $\{\langle p,A\rangle : p \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega), A \in [\mathscr{F}]^{<\omega}\}$ con el siguiente orden:

$$\langle q,B\rangle \leq \langle p,A\rangle \iff q \supseteq p \wedge B \supseteq A \wedge \forall n \in \operatorname{dom} q \smallsetminus \operatorname{dom} p,\ q(n) > f(n) \text{ para toda } f \in A.$$

La primera coordenada p nos va aproximando a la f que queremos construir, mientras que la segunda coordenada nos "promete" que toda mejor aproximación dominará a las funciones en A.

Veamos que $\mathbb{P}_b$ es ccc. Supongamos que $\{\langle p_\alpha,A_\alpha\rangle : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{P}_b$. Como $|\mathrm{Fn}(\omega,\omega)| = \aleph_0$, hay $\alpha \neq \beta$ tales que $p_\alpha = p_\beta = p$. Luego $\langle p, A_\alpha \cup A_\beta\rangle$ es cota inferior, así que no puede ser una anticadena.

Definamos los conjuntos densos relevantes.

$$D_n := \{\langle p,A\rangle : n \in \operatorname{dom} p\} \text{ es denso en } \mathbb{P}_b.$$

Para verlo, sea $\langle q,A\rangle \in \mathbb{P}_b$. Si $n \in \operatorname{dom} q$, $q \in D_n$ y no hay nada que probar; sino, sea

$$p := q \cup \{\langle n, 1 + \max\{f(n) : f \in A\}\rangle\}.$$

Entonces $\langle p,A\rangle \in D_n$ y es más fuerte que $\langle q,A\rangle$. Por otro lado, podemos ver fácilmente que

$$E_f := \{\langle q,B\rangle : f \in B\} \text{ es denso en } \mathbb{P}_b :$$

si $\langle p,A\rangle \in \mathbb{P}_b$, entonces $\langle p,A\cup\{f\}\rangle \in E_f$ y extiende a $\langle p,A\rangle$.

Por $MA(\kappa)$, hay un filtro $(\{D_n\}_{n\in\omega} \cup \{E_f\}_{f\in\mathscr{F}})$-genérico G. Sea

$$h := \bigcup\{p \in \mathrm{Fn}(\omega,\omega) : \exists A\,(\langle p,A\rangle \in G)\}.$$

Luego tenemos lo siguiente:

- h es función puesto que $\langle p,A\rangle, \langle q,B\rangle \in G$ entonces p y q son compatibles en $\mathrm{Fn}(\omega,\omega)$; y
- es total (usando que G corta a cada D_n).

Sea ahora $f \in \mathscr{F}$; queremos ver que $f <^* h$. Por genericidad, existe $\langle p,A\rangle \in G\cap E_f$, luego $f \in A$. Sea $n \notin \operatorname{dom} p$; nuevamente, por ser G genérico, podemos elegir $\langle q,B\rangle \in G$ tal que $n \in \operatorname{dom} q$. Como G es filtro, hay $\langle r,C\rangle \in G$ que extiende a $\langle p,A\rangle$ y a $\langle q,B\rangle$. Como $r \supseteq q$, $n \in \operatorname{dom} r \smallsetminus \operatorname{dom} p$. Luego, como $\langle r,C\rangle \leq \langle p,A\rangle$, obtenemos $r(n) \geq f(n)$. Pero por construcción, $h(n) = r(n)$. En conclusión, $h(n) > f(n)$ para todo $n \notin \operatorname{dom} p$ (un conjunto finito), así que $f <^* h$. ⊥⊥

Corolario 6.21. *MA implica* $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$, *y luego* $\mathfrak{a} = 2^{\aleph_0}$.

Citaremos, sin prueba, otras dos aplicaciones de *MA*

Teorema 6.22. *$MA(\kappa)$ implica* $2^\kappa = 2^{\aleph_0}$. ⊥⊥

La prueba de este Teorema se basa en codificar subconjuntos de κ con familias locas de ω. Como consecuencia inmediata se obtiene:

Corolario 6.23. *MA implica que* $2^{\aleph_0}$ *es regular.*

Por último, utilizando los posets

$$\langle\{p \subseteq \mathbb{R} : p \text{ abierto}, \mu(p) < \varepsilon\}, \supseteq\rangle$$

donde $\varepsilon > 0$ y μ es la medida de Lebesgue, se puede probar:

Teorema 6.24. *$MA(\kappa)$ implica que para toda familia $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ de conjuntos de medida nula, su unión tiene medida nula.*

6.6. Ejercicios

x6.10. Probar el Corolario del Teorema 6.22.

x6.11. Dar un ejemplo explícito de anticadena maximal infinita de $\mathbb{P}_b$ (poset de la prueba del Teorema 6.20).

x6.12. Para cada $k \in \omega$, sea $H_k := \{\langle p,A\rangle \in \mathbb{P}_b : k \in \operatorname{img} p\}$. Probar que H_k no es denso.

7. Filtros sobre κ

Para aprovechar esta sección, se requieren conocimientos básicos de Topología y Teoría de la Medida. En particular, utilizaremos la ***topología del orden***, que está definida en cualquier conjunto totalmente ordenado $\langle P, < \rangle$ como la topología que tiene por sub-base a los conjuntos de la forma $[a) := \{x \in P : a < x\}$ y $(b] := \{x \in P : x < b\}$ (ver, por ejemplo [8, Sect. 14, p. 84]).

7.1. Filtros e ideales

En la Sección 6, la noción de *filtro* correspondía al conjunto de las propiedades de algún objeto (que uno querría construir). Otro concepto que se describe convenientemente usando filtros es el de "conjunto grande". En general, dado un conjunto X, $\mathscr{F}$ es un ***filtro* sobre** X si es un filtro *en* $\langle \mathscr{P}(X) \smallsetminus \{\varnothing\}, \subseteq \rangle$. Explícitamente, $\mathscr{F}$ es un subconjunto de $\mathscr{P}(X)$ que cumple:

- $\mathscr{F} \neq \mathscr{P}(X)$ (es "propio");
- $\mathscr{F}$ es cerrado hacia arriba: $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B \subseteq X$ implican $B \in \mathscr{F}$; y
- $\mathscr{F}$ es cerrado por intersecciones finitas.

Ejemplo 7.1. 1. $X = \omega$; $\mathscr{F}r = \{A \subseteq X : X \smallsetminus A \text{ finito}\}$ es el *filtro de Fréchet*.

2. $X = [0,1]$; $\mathscr{F}ull = \{\text{conjuntos medibles Lebesgue de medida } 1\}$.

Lema 7.2. *Si $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(X)$ tiene la* propiedad de las intersecciones finitas *(PIF), i.e., para todos los $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}$, $A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \varnothing$, entonces existe el menor filtro que contiene a $\mathscr{A}$.*

Demostración. Es fácil ver que $\{B \subseteq X : \exists A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}\, (A_1 \cap \dots \cap A_n \subseteq B)\}$ cumple con lo requerido. $\Box$

Dualmente, se puede definir la noción de ***ideal*** (filtro *en* $\langle \mathscr{P}(X) \smallsetminus \{X\}, \supseteq \rangle$) que corresponde a la idea de conjunto chico (un subconjunto de un conjunto chico es chico, la unión de dos conjuntos chicos es chica).

Ejemplo 7.3. $\mathscr{N}ull := \{X \subseteq [0,1] : [0,1] \smallsetminus X \in \mathscr{F}ull\}$ es el ideal de los conjuntos de medida exterior 0 del intervalo $[0,1]$. En general, dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre X, la familia $\mathscr{F}^* := \{X \smallsetminus F : F \in \mathscr{F}\}$ es un ideal, llamado el ***ideal dual***.

De hecho, los elementos de $\mathscr{N}ull$ son mucho más chicos que el resto de los elementos de $\mathscr{P}([0,1])$: unión numerable de conjuntos chicos es chica.

Definición 7.4. Un filtro $\mathscr{F}$ es ***κ-completo*** si es cerrado por intersecciones de tamaño menor a κ. Un ideal $\mathscr{I}$ es *κ-completo* si es cerrado por uniones de tamaño menor a κ. Se utiliza también ***σ-completo*** para indicar "$\aleph_1$-completo", y decimos que $\mathscr{I}$ es un ***σ-ideal***.

En conclusión, tanto $\mathscr{F}ull$ como $\mathscr{N}ull$ son σ-completos. Habiendo introducido estos ejemplos, son útiles las frases "tener medida 0" y "medida total" (medida 1 en el caso de $[0,1]$) cuando trabajamos en general con cualquier filtro. En particular, dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre X, si decimos que "para casi todo $x \in X$ se da $\varphi(x)$", significa que $\{x \in X : \varphi(x)\} \in \mathscr{F}$.

También podemos definir los "conjuntos de medida positiva":

Definición 7.5. Dado un filtro $\mathscr{F}$ sobre X, $E \subseteq X$ es $\mathscr{F}$***-positivo*** si $E \cap C \neq \varnothing$ para todo $C \in \mathscr{F}$.

Una situación muy especial es cuando todos los subconjuntos de X son o bien grandes o chicos (medida 1 ó 0).

Definición 7.6. Un ***ultrafiltro*** sobre X es un filtro $\mathscr{U}$ tal que para cada $A \subseteq X$, $A \in \mathscr{U}$ ó $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Es decir, un ultrafiltro tiene la propiedad de "respetar la negación":

$$\{x \in X : \neg\varphi(x)\} \in \mathscr{U} \qquad \text{si y sólo si} \qquad \text{no } (\{x \in X : \varphi(x)\} \in \mathscr{U}).$$

Un filtro $\mathscr{U}$ es ***primo*** si $A \cup B \in \mathscr{U}$ implica $A \in \mathscr{U}$ ó $B \in \mathscr{U}$. En este caso, $\mathscr{U}$ "respeta la disyunción":

$$\{x \in X : \varphi(x) \vee \psi(x)\} \in \mathscr{U} \quad \text{si y sólo si} \quad (\{x \in X : \varphi(x)\} \in \mathscr{U}) \text{ ó } (\{x \in X : \psi(x)\} \in \mathscr{U}).$$

De hecho, los ultrafiltros respetan a *todos* los conectivos proposicionales, cosa que los hace muy expresivos.

Lema 7.7. *Un filtro $\mathscr{F}$ sobre X es un ultrafiltro si y sólo si es maximal según la inclusión.*

Demostración. ($\Rightarrow$) No se puede agregar nada sin que aparezca $\varnothing$ como una intersección.

($\Leftarrow$) Basta ver que si $\mathscr{F}$ no es un ultrafiltro, entonces hay $A \subseteq X$ tal que $A, X \setminus A \notin \mathscr{F}$ y por ende $\mathscr{F} \cup \{A\}$ tiene la PIF. Luego el filtro generado por $\mathscr{F} \cup \{A\}$ (Lema 7.2) incluye propiamente a $\mathscr{F}$. $\perp\!\!\!\perp$

Ilustremos con algunos ejemplos.

Ejemplo 7.8. Sea $\varnothing \neq A \subseteq X$. El filtro ***principal*** generado por A es $[A) := \{B \subseteq X : B \supseteq A\}$. Es λ-completo para todo λ.

El filtro $[\{0,2\})$ sobre ω no es un ultrafiltro (pues está contenido propiamente en $[\{2\})$, por ejemplo). Un filtro principal $[A)$ es un ultrafiltro si y sólo si $|A| = 1$.

Usando el Principio Maximal de Hausdorff o el Lema de Zorn, se puede probar fácilmente:

Teorema 7.9 (del Filtro Primo)**.** *Todo filtro sobre un conjunto está contenido en uno maximal.*

Ejemplo 7.10. Si X es infinito, el filtro de Fréchet no es principal. Usando el Teorema del Filtro Primo se lo puede extender a uno maximal; luego existen ultrafiltros no principales.

Dedicaremos el resto de la sección a un filtro muy importante sobre un cardinal regular κ, que permite apreciar de lleno la diferencia entre los ordinales contables y los que no lo son.

7.2. Ejercicios

x7.1. Convencerse de que los conjuntos $\mathscr{F}ull$-positivos son exactamente los subconjuntos de $[0,1]$ de medida exterior positiva.

x7.2. Si un filtro $\mathscr{F}$ sobre X tiene algún elemento finito, entonces es principal.

x7.3. Probar que todo ultrafiltro es un filtro primo.

x7.4. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Probar si X es $\mathcal{U}$-positivo entonces $X \in \mathcal{U}$.

x7.5. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal σ-completo sobre X. Probar que la función $\mu : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}$

$$\mu(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } A \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } A \notin \mathcal{U}, \end{cases}$$

es una medida que se anula en los singuletes.

x7.6. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre X. $\mathcal{U}$ es κ-completo si y sólo si no hay partición $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ de X tal que $\lambda < \kappa$ y $X_\alpha \notin \mathcal{U}$ para todo $\alpha < \lambda$.

7.3. Conjuntos Club

En toda esta sección, κ denotará un cardinal regular incontable.

Definición 7.11. $X \subseteq \kappa$ es ***club*** si $\sup X = \kappa$ (es no acotado) y para todo $Y \subseteq X$ no vacío tal que $\sup Y < \kappa$, $\sup Y \in X$ (es cerrado en la topología del orden).[6]

Los conjuntos club serán ejemplos de subconjuntos "grandes" del cardinal κ. Esto sólo tiene sentido cuando $\operatorname{cf} \kappa > \omega$, puesto que los conjuntos de los pares y de los impares en ω son ambos cerrados y no acotados, pero tienen intersección vacía. Esto no puede suceder en el caso no numerable.

Lema 7.12 ([7, III.6.2])**.** *Sea $\lambda < \kappa$ y sean $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$ clubes. Entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ es club.*

Demostración. La intersección de cerrados es cerrada. Basta probar que no es acotada.

Dado $\alpha < \lambda$, sea $f_\alpha(\beta) := \min C_\alpha \setminus \beta + 1$; luego $f_\alpha(\beta) > \beta$ para cada β. Sea ahora $\delta_0 \in \kappa$ arbitrario. Definamos $\delta_{n+1} := \sup\{f_\alpha(\delta_n) : \alpha < \lambda\}$; resulta $\delta_{n+1} < \kappa$ por ser este último regular. Finalmente, $\delta_\omega := \sup\{\delta_n : n \in \omega\} < \kappa$ puesto que $\operatorname{cf} \kappa > \omega$. Puesto que $\delta_n < f_\alpha(\delta_n) \le \delta_{n+1}$, tenemos que $\delta_\omega = \sup\{f_\alpha(\delta_n) : n \in \omega\} \in C_\alpha$, puesto que es el supremo de elementos de C_α.

Como δ_0 era arbitrario, C_α no es acotado en κ. ⊞

Este resultado nos justifica la siguiente

Definición 7.13. El ***filtro club*** es el filtro generado por los subconjuntos club de κ: $\mathrm{Club}(\kappa) := \{X \subseteq \kappa : \exists C \subseteq \kappa \text{ club tal que } C \subseteq X\}$.

Por el Lema 7.12 obtenemos inmediatamente:

Corolario 7.14. *El filtro* $\mathrm{Club}(\kappa)$ *es κ-completo.*

En un primer vistazo, es un poco difícil ver en qué sentido es "grande" un elemento del filtro $\mathrm{Club}(\kappa)$. Una interpretación extremadamente liberal de esto es que los conjuntos club tienen "densidad 1 en el infinito". Esta intuición se justifica un poco más con el siguiente ejemplo.

---

[6] El acrónimo "club" proviene del inglés *closed unbounded*.

Ejemplo 7.15. Se puede ver que $\mathsf{Lim} \cap \kappa$ es club. Por otro lado, pareciera haber tantos ordinales límites como sucesores en κ. Incluso más de estos últimos, pues entre dos ordinales $\xi < \zeta$ en $\mathsf{Lim} \cap \kappa$, hay infinitos sucesores: $\xi + 1, \xi + 2, \ldots$. Sin embargo, al conjunto de ordinales sucesores lo puedo "traer desde el infinito" (trasladar inyectivamente) una unidad a la izquierda mediante el mapa $\alpha + 1 \mapsto \alpha$. Esto es imposible para el conjunto $\mathsf{Lim} \cap \kappa$: ninguna función $f : \mathsf{Lim} \cap \kappa \to \kappa$ que cumpla $f(\alpha) < \alpha$ puede ser inyectiva. Esto se justificará más adelante usando el Lema de Compresión de Fodor.

Ejemplo 7.16. Para cada $\alpha < \kappa$, $\kappa \smallsetminus (\alpha + 1) := \{\beta < \kappa : \alpha < \beta\}$ es club en κ.

Ejercicio 7.17. Probar que $\mathsf{Card} \cap \kappa$ es club en κ.

A los conjuntos $\mathrm{Club}(\kappa)$-positivos los llamaremos "estacionarios".

Definición 7.18. $X \subseteq \kappa$ es ***estacionario*** si $C \cap X \neq \varnothing$ para cada $C \subseteq \kappa$ club.

Reforzando las analogías planteadas en la subsección anterior con los subconjuntos del $[0, 1]$, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} C \text{ club} & \longleftrightarrow & \text{conjunto Borel de medida 1} \\ X \in \mathrm{Club}(\kappa) & \longleftrightarrow & \text{conjunto medible Lebesgue de medida 1} \\ \text{no estacionario} & \longleftrightarrow & \text{conjunto de medida exterior 0} \\ \text{estacionario} & \longleftrightarrow & \text{conjunto de medida exterior positiva.} \end{array}$$

Para apreciar más las propiedades de los conjuntos estacionarios, es vital utilizar los ejemplos de clubes que hemos visto hasta ahora. Si $S \subseteq \kappa$ es estacionario, entonces

1. S no es acotado en κ (por el Ejemplo 7.16);
2. S tiene ordinales límites (por el Ejemplo 7.15);
3. Los ordinales límites de S no son acotados en κ;
4. ...etcétera.

Dada esta enumeración, puede parecer muy difícil conseguir un conjunto que sea estacionario pero no club. Subsanemos esta situación con un ejemplo.

Ejemplo 7.19. Si $\theta < \kappa$ es regular, entonces $S^{\kappa}_{\theta} := \{\alpha \in \kappa \cap \mathsf{Lim} : \mathrm{cf}(\alpha) = \theta\}$ es un subconjunto estacionario de κ. En particular, si $\kappa \geq \omega_2$, S^{κ}_{ω} y $S^{\kappa}_{\omega_1}$ son disjuntos, y luego ninguno puede ser club.

Concluimos también que $\mathrm{Club}(\kappa)$ no es un ultrafiltro si $\kappa \geq \omega_2$. De hecho, un resultado muchísimo más fuerte de Ulam [7, III.6.10] muestra que si $\kappa > \omega$ es un cardinal sucesor, existen κ subconjuntos de κ estacionarios disjuntos.

Si bien $\mathrm{Club}(\kappa)$ no es cerrado por intersecciones de tamaño κ, tiene una propiedad de clausura un poco más fuerte que ser κ-completo. Para ello, introducimos la siguiente operación.

Definición 7.20. Sea $\{C_\gamma : \gamma < \kappa\}$ una familia de subconjuntos de κ. Su ***intersección diagonal*** es el conjunto $\triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma := \{\gamma < \kappa : \gamma \in \bigcap_{\alpha<\gamma} C_\alpha\}$.

En la Figura 2 se comparan las operaciones de intersección ordinaria y la diagonal. Los puntos llenos denotan elementos de los conjuntos C_α, y los ordinales que faltan aparecen como puntos vacíos (así, $C_0 = \{2,4,5,\dots\}$). Mientras que la intersección ordinaria requiere que todos los puntos de una columna estén llenos para que el ordinal correspondiente esté en $\bigcap_\alpha C_\alpha$, la intersección diagonal sólo se fija que lo estén estrictamente por encima de la diagonal de línea quebrada (de esta manera, $4 \in \triangle_\alpha C_\alpha \smallsetminus \bigcap_\alpha C_\alpha$, por ejemplo).

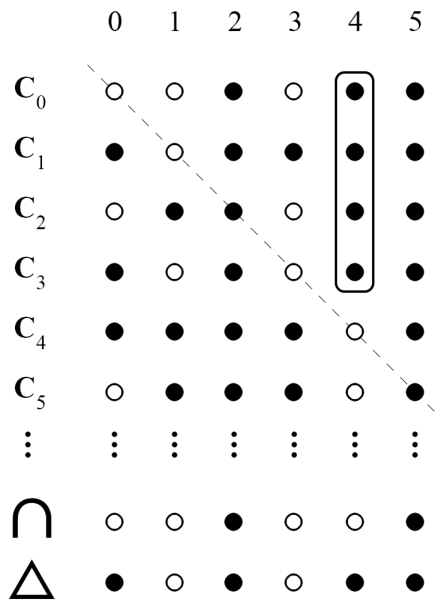


Figura 2: Intersección diagonal (por EMM).

A los filtros sobre κ que son cerrados por intersecciones diagonales se los denomina ***normales***.

Lema 7.21. *Si C_α $(\alpha < \kappa)$ son clubes de κ, entonces $\triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$ es club. Luego* $\mathrm{Club}(\kappa)$ *es normal.*

Demostración. Se puede ver fácilmente que $\triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma = \bigcap_{\gamma<\kappa} C_\gamma \cup (\gamma+1) = \bigcap_{\gamma<\kappa} C_\gamma \cup [0,\gamma]$, así que es cerrada.

Para ver que no es acotada, tomemos $\delta_0 \in \kappa$ arbitrario. Recursivamente definimos a δ_{n+1} como algún elemento de $\bigcap_{\alpha<\delta_n} C_\alpha$ que sea mayor que δ_n (tal intersección es club por el Lema 7.12).

Veamos que $\delta_\omega := \sup\{\delta_n : n \in \omega\} \in \bigcap_{\alpha<\delta_\omega} C_\alpha$. Sea $\alpha < \delta_\omega$. Luego hay m tal que $\alpha < \delta_m$. Como $\delta_{n+1} \in C_\alpha$ para todo $n \geq m$ por construcción, tenemos que $\{\delta_{n+1} : n \geq m\} \subseteq C_\alpha$, y su supremo, δ_ω, también están en C_α.

Como $\delta_0 < \delta_\omega \in \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$ y δ_0 era arbitrario, tenemos el resultado. ⫫

Tenemos dos aplicaciones importantes de este Lema.

Lema 7.22. *Sea $f : \kappa \to \kappa$. Luego $D := \{\alpha < \kappa : \alpha$ es cerrado por $f\}$ es club en κ.*

En lenguaje del Álgebra Universal, si $\langle \kappa, f \rangle$ es un álgebra, entonces el conjunto de los $\alpha < \kappa$ tales que $\langle \alpha, f \restriction \alpha \rangle$ es subálgebra de $\langle \kappa, f \rangle$ es club.

Demostración. Sean $C_\beta := \{\alpha < \kappa : f(\beta) < \alpha\}$ (son clubes por el Ejemplo 7.16). Luego

$$D = \{\alpha < \kappa : \forall \beta < \alpha\, (f(\beta) < \alpha)\} = \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} C_\alpha.$$ ⫫

Teorema 7.23 (Lema de "Compresión" de Fodor)**.** *Sean $\kappa > \omega$ regular, $S \subseteq \kappa$ estacionario y $f : S \to \kappa$ tal que $f(\beta) < \beta$ para todo $\beta \in S$ (f es* **regresiva***). Entonces existe $\alpha < \kappa$ tal que $f^{-1}(\{\alpha\})$ es estacionario.*

Demostración. Probamos la contrarrecíproca. Supongamos que para todo $\alpha < \kappa$, $f^{-1}(\{\alpha\})$ no es estacionario. Luego hay un club $C_\alpha \subseteq \kappa \smallsetminus f^{-1}(\{\alpha\})$. Sea $D := \triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha$, y tomemos $\beta \in S \cap D$. Tenemos

$$\forall \alpha < \beta \, (\beta \in C_\alpha) \implies \forall \alpha < \beta \, (\beta \notin f^{-1}(\{\alpha\})) \implies \forall \alpha < \beta \, (f(\beta) \neq \alpha) \implies f(\beta) \geq \beta,$$

luego f no es regresiva. ⫫

Luego, toda vez que tengamos una función regresiva $f : \mathsf{Lim} \cap \omega_1 \to \omega_1$, no sólo no va a ser inyectiva, sino que habrá $\aleph_1$ elementos de $\mathsf{Lim} \cap \omega_1$ que irán a parar por f al mismo elemento de ω_1. Dicho con la interpretación liberal del Ejemplo 7.15, al tener $\mathsf{Lim} \cap \omega_1$ "densidad 1 en el infinito", no puedo traerlo a la izquierda sin que se apelmacen sus elementos.

7.4. Ejercicios

x7.7. Si C es club en κ y $\alpha < \kappa$, entonces $C \cap \{\beta < \kappa : \alpha < \beta\}$ es club en κ.

x7.8. Si S es estacionario y C es club en κ, entonces $S \cap C$ es estacionario en κ.

x7.9. Probar que si C es club en κ y $\alpha \in \kappa \smallsetminus C$, entonces existe $\max\{\beta \in C : \beta < \alpha\}$ (siempre que este conjunto no sea vacío).

x7.10. (*) Probar que los conjuntos S^κ_θ del Ejemplo 7.19 son estacionarios. ⫫

x7.11. Probar que para toda $C \in {}^\kappa\mathscr{P}(\kappa)$, $0 \in \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$.

x7.12. Probar que $\triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma = \bigcap_{\gamma<\kappa} C_\gamma \cup (\gamma+1)$ (y luego $\bigcap_{\gamma<\kappa} C_\gamma \subseteq \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$).

x7.13. El Lema de Fodor (Teorema 7.23) no vale si κ no es regular. (Pensar en $\mathsf{Card} \cap \aleph_{\omega_1}$).

x7.14. (*) Probar que toda $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ continua es eventualmente constante. ⫫

Con esto se puede probar que ω_1 es un espacio N_1, Hausdorff, tal que toda $f \in C(\omega_1, \mathbb{R})$ tiene imagen compacta, pero no es compacto.

Un cardinal es ***(débilmente) Mahlo*** si es (débilmente) inaccesible y $\{\lambda < \kappa : \lambda \text{ es regular}\}$ es estacionario en κ.

Mejorar, confusión Club con estacionario

x7.15. Sea κ débilmente Mahlo. Probar que $\mathsf{LimCard} \cap \kappa$ es estacionario en κ.

En el próximo ejercicio, decimos "los cardinales con la propiedad P son estacionarios en κ" cuando $\{\lambda \in \kappa : \lambda \text{ cardinal tal que } P(\lambda)\}$ es estacionario en κ.

x7.16. Sea κ Mahlo.

a) Los cardinales límites en sentido fuerte son estacionarios en κ.

b) Probar que los cardinales inaccesibles son estacionarios en κ.

Luego, los cardinales Mahlo son mucho más grandes que el primer inaccesible, que el primer inaccesible que es límite de inaccesibles, etcétera.

8. Cardinales medibles

8.1. El problema de la medida

La tesis doctoral de Lebesgue (1902) tiene un nombre extremadamente elegante: *Integral, Longitud, Área*. En ella se plantea el problema de definir una función Λ que asocie a cada subconjunto acotado de la recta un número real de manera que se cumplan las siguientes propiedades:

1. Λ no es idénticamente 0,

2. Λ es ***invariante por traslaciones*** (i.e., $\Lambda(X) = \Lambda(X+r)$ para todo conjunto acotado X, y

3. Λ es ***contablemente aditiva***, es decir, si los X_n ($n \in \omega$) son disjuntos dos a dos, $\Lambda(\bigcup_n X_n) = \sum_n \Lambda(X_n)$.

Rápidamente, Vitali (1905) prueba usando *AC* que esto es imposible. No obstante, Banach plantea una versión más general del problema, que no es invalidada por su ejemplo.

Problema 8.1 (Banach)**.** *Decidir si hay algún conjunto E y una función* $\mu : \mathscr{P}(E) \to [0,1]$ *que satisfagan:*

1. $\mu(\varnothing) = 0$ *y* $\mu(E) = 1$*,*

2. μ *es* ***no trivial****:* $\mu(\{x\}) = 0$ *para todo* $x \in E$*, y*

3. μ *es contablemente aditiva.*

Diremos que μ es una ***medida*** sobre E; la no trivialidad tiene por sinónimos "μ es ***continua***" ó "μ ***se anula en singuletes***". Para ver que efectivamente es una situación más general, primero basta convencerse que toda Λ de arriba está determinada por su valor en $\mathscr{P}([0,1])$, y que la no trivialidad se sigue de la invariancia por traslaciones.

8.2. Medidas sobre un cardinal

Como el problema de la medida de Banach no depende intrínsecamente del conjunto E, podemos redefinir todo refiriéndonos a un cardinal.

Definición 8.2. Sea $\kappa \in \mathrm{Card}$. Una ***medida sobre*** κ es una función $\mu : \mathscr{P}(\kappa) \to [0,1]$ que satisface:

1. $\mu(\varnothing) = 0$ y $\mu(\kappa) = 1$,

2. $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x \in \kappa$, y

3. μ es contablemente aditiva.

Si $\kappa < \lambda$ son cardinales infinitos y hay una medida sobre κ, entonces hay medida sobre λ. En efecto, sea μ medida sobre κ. Luego, $\nu(A) := \mu(A \cap \kappa)$ es una medida sobre λ.

En la siguiente definición, la suma arbitraria de números positivos se define como en el Ejercicio x0.11.

Definición 8.3. Sea μ una medida sobre κ y sea $\lambda \in \mathsf{Card}$. Decimos que μ es ***λ-aditiva*** si para todo $\beta < \lambda$ y $\{A_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ familia disjunta, se da

$$\mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \beta\}\big) = \sum_{\alpha<\beta} \mu(A_\alpha).$$

Por definición, una medida sobre κ es automáticamente $\aleph_1$-aditiva. Observemos que la medida ν de más arriba no es λ-aditiva.

Lema 8.4. *Si κ es el menor cardinal que admite una medida no trivial μ, entonces μ es κ-aditiva.*

Demostración. Por la contrarrecíproca. Supongamos que $\mu : \mathscr{P}(\kappa) \to [0,1]$ no es κ-aditiva. Luego hay $\lambda < \kappa$ y $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$ subconjuntos de κ disjuntos dos a dos tales que

$$\mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}\big) \neq \sum_{\alpha<\lambda} \mu(A_\alpha).$$

Afirmación. Hay un conjunto contable $I \subseteq \lambda$ tal que $\forall \alpha \in \lambda \smallsetminus I$, $\mu(A_\alpha) = 0$ (ejercicio).

Como $\aleph_1 \leq \lambda$, podemos reemplazar vía una biyección λ por $\lambda + \omega$ y suponer que $\mu(A_\alpha) = 0$ para todo $\alpha < \lambda$. Luego tenemos

$$\mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda + \omega\}\big) \neq \sum_{\alpha<\lambda+\omega} \mu(A_\alpha) = \sum_{n<\omega} \mu(A_{\alpha+n}). \tag{6}$$

Por aditividad contable,

$$\begin{aligned}
\mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda + \omega\}\big) &= \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\} \cup \bigcup\{A_\alpha : \lambda \leq \alpha < \lambda + \omega\}\big) \\
&= \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}\big) + \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \lambda \leq \alpha < \lambda + \omega\}\big) \\
&= \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}\big) + \sum_{n<\omega} \mu(A_{\alpha+n}).
\end{aligned}$$

Luego, restando $\sum_{n<\omega} \mu(A_{\alpha+n})$ en ambos miembros de (6), concluimos que los A_α $(\alpha < \lambda)$ son disjuntos dos a dos tales que

$$r := \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}\big) \neq 0$$

Definimos medida ν sobre λ: si $X \subseteq \lambda$, $\nu(X) := \frac{1}{r} \cdot \mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha \in X\}\big)$. Es no trivial, luego κ no era el menor cardinal que admitía una tal medida. ⊥

Definición 8.5. Un cardinal κ es ***medible a valores reales*** (***mvr***) si admite una medida no trivial κ-aditiva.

Lema 8.6. *Todo cardinal mvr es regular.*

Demostración. Supongamos que κ no es regular, y sea $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_\alpha < \ldots$ $(\alpha < \lambda)$ cofinal en κ con $\lambda < \kappa$. Luego κ es la unión disjunta de los conjuntos $A_\alpha := \{\beta < \kappa : x_\alpha \leq \beta < x_{\alpha+1}\}$. Como los singuletes tienen medida nula, la κ-aditividad asegura que cada A_α tiene medida nula. Pero aplicando κ-aditividad una vez más se concluye que $\bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha = \kappa$ también tiene medida nula, absurdo. ⊥

Definición 8.7. Sea μ una medida sobre κ. Un subconjunto $A \subseteq \kappa$ es un ***átomo*** de μ si $\mu(A) > 0$ y para todo $B \subseteq A$, $\mu(B) \in \{0, \mu(A)\}$.

Es decir, A es la representación fidedigna de la injusticia absoluta según μ: partiendo la torta A, alguien se queda con prácticamente todo y el resto con migajas.

Ulam, en sus años de doctorado (1929), prueba una dicotomía sorprendente sobre el problema de la medida de Banach. En caso de haber solución con átomos podría considerarse un tanto espuria; especialmente, si es que estamos pensando, como en el caso de Lebesgue, en obtener una medida "sinceramente continua", y no sólo desde el punto de vista de los singuletes. En cierto modo, Ulam prueba la recíproca de esta expresión de deseo, y muchísimo más:

Teorema 8.8 (Ulam)**.** *Supongamos que el problema de la medida tiene solución, y que κ es el menor cardinal que admita una medida μ. Entonces:*

1. *Si μ no tiene átomos, $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.*

2. *Si μ tiene algún átomo, κ es inaccesible.*

En cada caso, las conclusiones son impactantes. En el primero, automáticamente hay solución del problema de la medida para el $[0,1]$ (puesto que el κ se inyecta en el $[0,1]$ y se puede "transferir" la medida). Pero no sólo esto, sino que usando un par de trucos se puede probar que hay una medida μ definida en todo $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ que extiende a la medida de Lebesgue.

A continuación, probaremos el primer ítem, y además que todo cardinal mvr es débilmente inaccesible. Esto mostrará que este caso de la dicotomía implica un fallo espectacular de *CH*.

Ejercicio 8.9. Si μ no tiene átomos, hay $c > 0$ tal que para todo $X \subseteq \kappa$ con $\mu(X) > 0$, existen X_1, X_2 tales que $X_1 \sqcup X_2 = X$ y $\mu(X_1), \mu(X_2) \geq c \cdot \mu(X)$. (De hecho, se puede probar con $c = \frac{1}{2}$).

Prueba del Teorema 8.8(1). Para cada $t \in {}^{<\omega}2$ definimos un subconjunto $X_t \subseteq \kappa$ con las siguientes propiedades:

- $X_\varnothing = \kappa$;
- $X_t = X_{t^\frown 0} \sqcup X_{t^\frown 1}$;
- $\mu(X_t) \underset{|t|\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

por recursión: supongamos X_t definidos y X_0, X_1 son una descomposición de X_t con $c \cdot \mu(X_t) \leq \mu(X_i)$ $(i = 0,1)$. Luego tenemos $\mu(X_i) \leq (1-c) \cdot \mu(X_t)$. Tomamos $X_{t^\frown i} := X_i$ y por inducción $\mu(X_t) \leq (1-c)^{|t|}$. Luego concluimos que para toda $f \in {}^{\omega}2$, $\bigcap_n X_{f\restriction n}$ tiene medida 0 (por monotonía de μ).

Definamos ahora una medida ν sobre ${}^{\omega}2$. Sean

$$F : {}^{\omega}2 \to \mathscr{P}(\kappa), \quad F(f) := \bigcap_n X_{f\restriction n}$$
$$\nu(A) = \mu(\bigcup\{F(f) : f \in A\}),$$

para $A \subseteq {}^{\omega}2$. Veamos que ν es medida no trivial sobre ${}^{\omega}2$.

La no trivialidad se sigue de que $\nu(\{f\}) = \mu(F(f)) = 0$ por construcción y que ν es σ-aditiva queda como ejercicio simple. Sólo resta probar que $\nu({}^{\omega}2) = 1$ y para esto es suficiente ver que

$$\kappa = \bigcup\{F(f) : f \in {}^{\omega}2\}. \tag{7}$$

Fijemos $\alpha < \kappa$; se puede probar por inducción en $n < \omega$ la siguiente afirmación:

> ($\star$) Existe un único $t \in {}^{<\omega}2$ tal que $\mathrm{dom}(t) = n$ y $\alpha \in X_t$; y todo $s \in {}^{<\omega}2$ con $\mathrm{dom}(s) < n$ está incluido en ese t.

De ($\star$) se sigue que los elementos de $S_\alpha := \{t \in {}^{<\omega}2 : \alpha \in X_t\}$ son comparables dos a dos y cada natural está en el dominio de alguno. Luego, su unión $f := \bigcup S_\alpha$ es una función de ω en 2 que cumple con $\alpha \in X_{f\restriction n}$ para todo n, es decir $\alpha \in F(f)$. Como α era arbitrario, se sigue (7). ⊥

Ejercicio 8.10. Probar que toda medida λ-aditiva es ***λ-subaditiva***, i.e., $\mu\big(\bigcup\{A_\alpha : \alpha < \beta\}\big) = \sum_{\alpha<\beta} \mu(A_\alpha)$ para todo $\beta < \lambda$ y toda familia $\{A_\alpha : \alpha < \beta\} \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$.

Teorema 8.11. *Todo cardinal mvr es límite.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que $\kappa = \lambda^+$ es mvr. Construiremos una ***matriz de Ulam***, con λ^+ filas y λ columnas

$$\kappa = \lambda^+ \left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\begin{array}{cccccc} F_0^0 & F_1^0 & F_2^0 & \dots & F_\theta^0 & \dots \\ & & & & & \\ F_0^1 & F_1^1 & F_2^1 & & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ F_0^\alpha & F_1^\alpha & F_2^\alpha & \dots & F_\theta^\alpha & \\ \vdots & & & & & \ddots \end{array}}^{\lambda} \end{array} \right.$$

cuyos elementos son subconjuntos de κ que cumplen

1. para todo $\theta < \lambda$ y $\alpha' < \alpha < \kappa$, $F_\theta^\alpha \cap F_\theta^{\alpha'} = \varnothing$, y
2. para todo $\alpha < \kappa$, $\left|\kappa \smallsetminus \bigcup_{\theta<\lambda} F_\theta^\alpha\right| \leq \lambda$.

Una vez hecho esto, el ítem 1 implica que en cada columna θ hay a lo sumo numerables α tales que $\mu(F_\theta^\alpha) > 0$. En total, hay a lo sumo $\lambda \cdot \aleph_0 = \lambda$ pares (α, θ) tales que $\mu(F_\theta^\alpha) > 0$. Luego, hay un $\alpha < \kappa$ tal que no es la primera componente de ninguno de esos pares. Entonces, fijándonos en la fila α, por el ítem 2, tenemos que $\mu(\kappa \smallsetminus \bigcup_{\theta<\lambda} F_\theta^\alpha) = 0$, y por lo tanto,

$$1 = \mu\Big(\bigcup_{\theta<\lambda} F_\theta^\alpha\Big) \leq \sum_{\theta<\lambda} \mu(F_\theta^\alpha),$$

por la κ-subaditividad de μ. Pero la suma es nula por elección de α, absurdo.

Ahora pasemos a la construcción de la matriz. Para cada $\rho < \kappa$, tomo $f_\rho : \rho \to \lambda$ inyectiva. Luego definamos

$$F_\theta^\alpha := \{\rho : \alpha < \rho < \kappa \wedge f_\rho(\alpha) = \theta\}.$$

Para cada θ, los conjuntos F_θ^α son disjuntos dos a dos puesto que si $f_\rho(\alpha) = \theta = f_\rho(\beta)$ entonces $\alpha = \beta$ por inyectividad. Por último,

$$\begin{aligned}\bigcup_{\theta<\lambda} F_\theta^\alpha &= \{\rho : \exists\theta\ (\alpha < \rho < \kappa \wedge f_\rho(\alpha) = \theta)\}\\ &= \{\rho : \alpha < \rho < \kappa \wedge \exists\theta\ (f_\rho(\alpha) = \theta)\}\\ &= \{\rho : \alpha < \rho < \kappa\} = \kappa \smallsetminus (\alpha+1),\end{aligned}$$

y luego $\kappa \smallsetminus \bigcup_{\theta<\lambda} F_\theta^\alpha = \alpha + 1$. Queda concluida la demostración. ⊥

Corolario 8.12. *Todo cardinal mvr es débilmente inaccesible.*

En particular, *ZFC* no puede probar que existan.

8.3. Cardinales medibles

Supongamos que κ admite una medida μ κ-aditiva y $A \subseteq \kappa$ es un átomo de μ. Podemos definir otra medida sobre κ de la siguiente manera:

$$\nu(X) := \frac{\mu(X \cap A)}{\mu(A)}.$$

Esta ν es un ejemplo de la siguiente

Definición 8.13. ν es una ***medida sobre κ a dos valores*** si es una medida sobre κ tal que $\nu : \mathscr{P}(\kappa) \to \{0,1\}$.

Lema 8.14. *κ admite medida no trivial a dos valores si y sólo si hay un ultrafiltro σ-completo no principal sobre κ.* ⊥

Definición 8.15. Un ***cardinal medible*** es un cardinal que admite una medida κ-aditiva a dos valores.

Luego, todo cardinal medible es mvr y por ende, débilmente inaccesible. Probaremos ahora que de hecho son inaccesibles (en sentido fuerte).

Teorema 8.16. *Todo cardinal medible es inaccesible.*

Demostración. Falta ver que son límites en sentido fuerte. Por el absurdo, supongamos que κ es medible y sea $\lambda < \kappa$ tal que $|{}^\lambda 2| = 2^\lambda \geq \kappa$.

Sea $S \subseteq {}^\lambda 2$ con $|S| = \kappa$. Tomemos μ medida a dos valores sobre S. Entonces, para cada $\alpha < \lambda$, exactamente uno entre

$$\{f \in S : f(\alpha) = 1\} \quad \text{y} \quad \{f \in S : f(\alpha) = 0\}$$

tiene medida 1 (puesto que son disjuntos y su unión es S). A ése lo llamamos X_α y definimos $g(\alpha)$ como el valor de sus elementos en α. Es decir,

$$X_\alpha := \{f \in S : f(\alpha) = g(\alpha)\}; \quad \mu(X_\alpha) = 1.$$

Como μ es κ-subaditiva (Ejercicio 8.10), se puede probar que $\mu(\bigcap\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}) = 1$. Pero $g \in {}^\lambda 2$ y $\bigcap\{X_\alpha : \alpha < \lambda\} = \{g\} \cap S$ tiene a lo sumo un elemento; absurdo porque μ era no trivial. ⊥

Prueba del Teorema 8.8(2). Sabemos que si κ es el menor cardinal que admite una medida, entonces ésta será κ aditiva. Al tener un átomo, obtenemos una medida a dos valores sobre κ, y luego κ es medible. Por el Teorema 8.16, κ es inaccesible. ⊥

8.4. Ejercicios

x8.1. De la prueba de Teorema 8.8(1):

a) Probar la afirmación ($\star$).

b) Probar que ν es σ-aditiva.

9. Los conjuntos bien fundados

En esta sección estudiaremos la clase WF de los conjuntos bien fundados; para ellos, la relación $\in$ es bien fundada. Bajo $ZF^- - P$ se puede definir recursivamente una noción de complejidad para los conjuntos bien fundados, dada por la función rango. Luego, se podrá ver bajo ZF^- que WF es un "modelo" de ZF (y respectivamente, con el Axioma de Elección).

9.1. La función rango

En general, para toda clase A y toda relación conjuntista y bien fundada R sobre A se puede definir el rango de un elemento de A. Los resultados de esta subsección se pueden obtener en $ZF^- - P$.

Definición 9.1. Si R es conjuntista y bien fundada sobre A, definimos recursivamente la función ***rango***:

$$\mathrm{rk}_{A,R}(y) := \bigcup\{S(\mathrm{rk}_{A,R}(x)) : x \, R \, y \wedge x \in A\}$$

para todo $y \in A$.

Lema 9.2. *Sea R bien fundada y conjuntista sobre A. Luego:*

1. $\mathrm{rk}_{A,R}(a) \in \mathsf{Ord}$ *para todo* $a \in A$;

2. $\mathrm{rk}_{A,R}(a) = \sup\{\mathrm{rk}_{A,R}(b) + 1 : b \, R \, a \wedge b \in A\}$ *para todo* $a \in A$;

3. $b \, R \, a$ *implica* $\mathrm{rk}_{A,R}(b) < \mathrm{rk}_{A,R}(a)$;

4. *Para todo* $\beta \leq \mathrm{rk}_{A,R}(a)$ *existe* $b \in \{a\} \cup a{\downarrow}^*$ *tal que* $\beta = \mathrm{rk}_{A,R}(b)$.

Demostración. Lo probamos por inducción bien fundada. Supongamos que para todo $b\,R\,a$ se dan las cuatro propiedades. Luego,

$$\mathrm{rk}_{A,R}(a) = \bigcup\{S(\mathrm{rk}_{A,R}(b)) : b\,R\,a \wedge b \in A\} = \sup\{\mathrm{rk}_{A,R}(b)+1 : b\,R\,a \wedge b \in A\},$$

que es un ordinal puesto que los $\mathrm{rk}_{A,R}(b)$ son ordinales. En particular, si $b\,R\,a$ entonces $\mathrm{rk}_{A,R}(a) \geq \mathrm{rk}_{A,R}(b)+1 > \mathrm{rk}_{A,R}(b)$. Esto nos prueba los tres primeros ítems. Para el último, supongamos que $\beta < \mathrm{rk}_{A,R}(a)$. Luego hay un $c\,R\,a$ tal que $\beta < \mathrm{rk}_{A,R}(c)+1$; en conclusión $\beta \leq \mathrm{rk}_{A,R}(c)$ y por hipótesis inductiva, $\beta = \mathrm{rk}_{A,R}(b)$ para algún $b \in \{c\} \cup c{\downarrow}^*$. Pero entonces $b \in a{\downarrow}^*$ por el Lema (∗) 2.2. ⊞

Definición 9.3. La ***clausura transitiva*** de un conjunto a es $\mathrm{trcl}(a) := \{x : x \in^* a\}$.

Ejercicio 9.4. Probar las siguientes afirmaciones para un conjunto a:

1. $\mathrm{trcl}(a)$ es transitivo e incluye a a.
2. Para toda clase transitiva A, $a \subseteq A$, implica $\mathrm{trcl}(a) \subseteq A$.
3. $b \in a$ implica $\mathrm{trcl}(b) \subseteq \mathrm{trcl}(a)$.

Ejercicio 9.5. Probar que si R es bien fundada en $x{\downarrow}^*$, entonces lo es en $\{x\} \cup x{\downarrow}^*$.

Si $R = \in$, entonces $\{x\} \cup x{\downarrow}^* = \mathrm{trcl}(\{x\})$, así que el Ejercicio 9.5 justifica la siguiente

Definición 9.6. Un conjunto b es ***bien fundado*** si $\in$ es bien fundada en $\mathrm{trcl}(b)$. WF denotará la clase de los conjuntos bien fundados, y si $b \in \mathsf{WF}$, su ***rango*** $\mathrm{rk}(b)$ es $\mathrm{rk}_{\mathrm{trcl}(\{b\});\in}(x)$.

Lema 9.7. *1.* WF *es una clase transitiva: para todo* $a \in \mathsf{WF}$ *y* $b \in a$*, se da* $b \in \mathsf{WF}$.

2. $\in$ *es bien fundada en* WF.

3. $\mathrm{rk}_{\mathsf{WF},\in}(a) = \mathrm{rk}(a) = \sup\{\mathrm{rk}(b)+1 : b \in a\}$.

Demostración. Supongamos que $a \in \mathsf{WF}$, esto es, $\in$ es bien fundada en $\mathrm{trcl}(a)$. Notemos que por el Ejercicio 9.4(3), $\in$ debe ser bien fundada en $\mathrm{trcl}(b)$; luego $b \in \mathsf{WF}$.

Para el segundo ítem, sea X un subconjunto no vacío de WF, y tomemos $x \in X$. Por definición, $\in$ es bien fundada en $\mathrm{trcl}(x)$. Si $\mathrm{trcl}(x) \cap X = \varnothing$, x es minimal en X. Sino, elegimos un elemento minimal en la intersección y será minimal en X.

Para el tercer ítem veremos un enunciado un poco más general. Supongamos que $\in$ es bien fundada sobre las clases transitivas A y B. Probemos por inducción bien fundada que $\mathrm{rk}_{A,\in}(a) = \mathrm{rk}_{B,\in}(a)$ para todo $a \in A \cap B$. Supongamos válido para todo $b \in a$. Luego,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rk}_{A,\in}(a) &= \sup\{\mathrm{rk}_{A,\in}(b)+1 : b \in a \wedge b \in A\} && \text{Definición } \mathrm{rk}_{A,\in} && (8)\\
&= \sup\{\mathrm{rk}_{A,\in}(b)+1 : b \in a\} && A \text{ transitiva} && (9)\\
&= \sup\{\mathrm{rk}_{A,\in}(b)+1 : b \in a \wedge b \in B\} && B \text{ transitiva} &&\\
&= \sup\{\mathrm{rk}_{B,\in}(b)+1 : b \in a \wedge b \in B\} && \text{Hipótesis inductiva} &&\\
&= \mathrm{rk}_{B,\in}(a) && \text{Definición } \mathrm{rk}_{B,\in} &&
\end{aligned}$$

Por el Ejercicio 9.4(1) podemos tomar $A = \mathrm{trcl}(\{a\})$ y $B = \mathsf{WF}$ obtenemos $\mathrm{rk}_{\mathsf{WF},\in}(a) = \mathrm{rk}(a)$. Para obtener la segunda igualdad, tomamos $A = \mathrm{trcl}(\{a\})$ y considerando las líneas (8) y (9) aplicamos el resultado recién probado con $B = \mathrm{trcl}(\{b\})$ para sustituir $\mathrm{rk}_{A,\in}(b)$ por $\mathrm{rk}(b)$. ⊞

Lema 9.8. *Para todo conjunto b, $b \in \mathsf{WF}$ si y sólo si $b \subseteq \mathsf{WF}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Lema 9.7(1)

($\Leftarrow$) Sea $b \subseteq \mathsf{WF}$; como WF es transitiva, $\operatorname{trcl}(b) \subseteq \mathsf{WF}$ por el Ejercicio 9.4(2). Luego $\in$ es bien fundada en $\operatorname{trcl}(b)$ por el Lema 9.7(2), y en conclusión $b \in \mathsf{WF}$. ⊥

9.2. Ejercicios

x9.2. Sea R bien fundada y conjuntista sobre A.

a) Si $x\, R^*\, a$ entonces $\operatorname{rk}_{A,R}(x) < \operatorname{rk}_{A,R}(a)$.

b) Probar que R^* es bien fundada sobre A.

x9.3. Probar que para cada $\alpha \in \mathsf{Ord}$, $\operatorname{rk}(\alpha) = \alpha$.

9.3. Jerarquías transfinitas de conjuntos

A continuación, utilizando el Axioma de Partes, demostraremos que WF se descompone en una jerarquía de conjuntos, indizada mediante los ordinales.

Lema 9.9. *Si $z \subseteq y \in \mathsf{WF}$ entonces $z \in \mathsf{WF}$ y $\operatorname{rk}(z) \leq \operatorname{rk}(y)$.*

Demostración. Si $w \in^* z$, entonces o bien $w \in z$ o existe un w' tal que $w \in^* w' \in z$ por el Lema $(*)$ 2.2. En el primer caso, $w \in y$, y en el segundo, $w \in^* w' \in y$, luego en ambos casos tenemos que $w \in^* y$ por el Lema $(*)$ 2.2. Así que $\operatorname{trcl}(z) \subseteq \operatorname{trcl}(y)$ y $\in$ debe ser bien fundada ahí por estar y en WF.

Para la segunda afirmación, basta aplicar la fórmula para calcular $\operatorname{rk}(y)$:

$$\operatorname{rk}(y) = \sup\{\operatorname{rk}(w)+1 : w \in y\} \geq \sup\{\operatorname{rk}(w)+1 : w \in z\} = \operatorname{rk}(z).$$ ⊥

Corolario 9.10. *(ZF^-) Si $x \in \mathsf{WF}$, entonces $\mathscr{P}(x) \in \mathsf{WF}$ y $\operatorname{rk}(\mathscr{P}(x)) = \operatorname{rk}(x)+1$.* ⊥

Definición 9.11. $R(\alpha) := \{x \in \mathsf{WF} : \operatorname{rk}(x) < \alpha\}$.

Los conjuntos que viven en $R(\alpha)$ son los que requieren menos de α “llaves anidadas” $\{\{\{\dots\}\}\}$ para su construcción.

Teorema 9.12. *(ZF^-) Los $R(\alpha)$ son conjuntos y cumplen con la definición recursiva*

$$\begin{aligned} R(0) &= \varnothing \\ R(\alpha+1) &= \mathscr{P}(R(\alpha)) \\ R(\gamma) &= \bigcup\{R(\alpha) : \alpha < \gamma\}, \qquad \gamma \in \mathsf{Lim}. \end{aligned}$$

Demostración. Lo demostramos por inducción en Ord.

$\boxed{\alpha = 0}$ Trivial.

$\boxed{\alpha+1}$ Supongamos que $R(\alpha)$ es un conjunto. Por el Axioma de Partes, $\mathscr{P}(R(\alpha))$ es un conjunto. Veamos las dos inclusiones; supongamos $x \subseteq R(\alpha)$. Por el Lema 9.8, $x \in \mathsf{WF}$. Entonces

$$\mathrm{rk}(x) = \sup\{\mathrm{rk}(y)+1 : y \in x\} \leq \alpha < \alpha+1,$$

puesto que $\mathrm{rk}(y) < \alpha$ para todo $y \in x$. Esto nos da $\mathscr{P}(R(\alpha)) \subseteq R(\alpha+1)$.

Para la otra, tomemos $b \in R(\alpha+1)$. Luego el Lema 9.2 asegura que para todo $x \in b$, $\mathrm{rk}(x) < \mathrm{rk}(b)$, luego $\mathrm{rk}(x) < \alpha$. En conclusión, $b \subseteq R(\alpha)$, y obtenemos la otra inclusión.

$\boxed{\gamma \in \mathsf{Lim}}$ El Axioma de Reemplazo asegura que el miembro derecho es un conjunto, y es bastante fácil chequear que la definición de $R(\gamma)$ implica que debe ser igual a esa unión. ⊥

Ejercicio 9.13. (ZFC^-) Sea κ un cardinal inaccesible. Entonces para todo $\alpha < \kappa$, $|R(\alpha)| < \kappa$.

La clase WF proveerá en la Sección 11.7 de un "modelo" de *ZF*, demostrando que la introducción del Axioma de Fundación a ZF^- no introduce contradicciones.

Otra forma de clasificar a un conjunto x es de acuerdo a la cantidad de conjuntos requeridos para construir x; esto es, el tamaño de su clausura transitiva.

Definición 9.14. (AC) Sea κ un cardinal. Los conjuntos ***de cardinal menor que κ hereditariamente*** son $H(\kappa) := \{x \in \mathsf{WF} : |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa\}$. Los conjuntos ***hereditariamente finitos*** HF son $H(\aleph_0)$, y los ***hereditariamente contables*** son los $\mathsf{HC} := H(\aleph_1)$.

En general, cuando tengamos una propiedad de conjuntos P, diremos que x *satisface "hereditariamente" P* si P vale en la clausura transitiva de $\{x\}$ (x cumple P, sus elementos cumplen P, los elementos de sus elementos cumplen, etc.). Notemos que en el caso de la Definición 9.14, todo $x \in H(\kappa)$ cumple con $|x| < \kappa$.

Teorema 9.15. *Trabajando en ZFC^-:*

1. *Para cada $\kappa \in \mathsf{Card}$, $H(\kappa)$ es un conjunto; más aún, $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$.*
2. *Si κ es inaccesible, entonces se da la igualdad.*

Demostración. Veamos que $H(\kappa) \subseteq R(\kappa)$ para todo κ. Sea $x \in H(\kappa)$; para cada $\alpha < \mathrm{rk}(x)$, existe $b \in^* x$ tal que $\mathrm{rk}(b) = \alpha$ por el Lema 9.2. Esto significa que $\mathrm{rk}[\mathrm{trcl}(x)] \supseteq \mathrm{rk}(x)$. Como $|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$, debe ser $|\mathrm{rk}(x)| < \kappa$; y como $\mathrm{rk}(x)$ es un ordinal, obtenemos $\mathrm{rk}(x) < \kappa$.

Para el segundo punto, sea $x \in R(\kappa) = \bigcup\{R(\alpha) : \alpha < \kappa\}$. Luego hay $\alpha < \kappa$ tal que $\mathrm{rk}(x) < \alpha$. Por el Ejercicio x9.2(a), $\mathrm{rk}(y) < \mathrm{rk}(x)$ para todo $y \in \mathrm{trcl}(x)$, así que $\mathrm{trcl}(x) \subseteq R(\alpha)$. Pero entonces el Ejercicio 9.13 nos asegura que $|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$. ⊥

Se puede probar que el cardinal de $H(\kappa)$ es $2^{<\kappa}$; ver [7, Lemma I.13.28]. En el siguiente lema, mostraremos que los $H(\kappa)$ con κ regular son cerrados por tomar subconjuntos de tamaño acotado.

Lema 9.16. *(AC) Supongamos que κ es regular. Si $y \subseteq H(\kappa)$ y $|y| < \kappa$ entonces $y \in H(k)$.*

Demostración. Por el Lema (∗) 2.2,

$$\mathrm{trcl}(y) = \{z : \exists x\,(z \in^* x \wedge x \in y)\} \cup y = \bigcup\{\mathrm{trcl}(x) : x \in y\} \cup y.$$

Como $|y| < \kappa$ y cada $\mathrm{trcl}(x)$ tiene cardinal menor a κ para $x \in y$ (puesto que $y \subseteq H(\kappa)$), la unión debe tener cardinal menor que κ por el Teorema 5.16, dado que κ es regular. ⊥

9.4. Ejercicios

Los siguientes ejercicios permitirán demostrar en la Sección 11.7 que los $R(\gamma)$ con $\gamma > \omega$ límite son modelos de Z.

x9.4. Suponga que $x, y \in \mathsf{WF}$. Entonces:

a) $\{x,y\} \in \mathsf{WF}$ y $\mathrm{rk}(\{x,y\}) = \mathrm{máx}(\mathrm{rk}(x), \mathrm{rk}(y)) + 1$.

b) $\mathscr{P}(x) \in \mathsf{WF}$ y $\mathrm{rk}(\mathscr{P}(x)) = \mathrm{rk}(x) + 1$ (esto es el Corolario 9.10).

c) $\bigcup x \in \mathsf{WF}$ y $\mathrm{rk}(\bigcup x) \leq \mathrm{rk}(x)$.

Y este resultado auxiliar asegura que Reemplazo vale en $H(\kappa)$:

x9.5. (AC) Suponga que κ es regular. Si $f : z \to H(\kappa)$ y $z \in H(\kappa)$ entonces $f, \mathrm{img} f \in H(\kappa)$.

x9.6. ¿Cuáles propiedades de las del Teorema 9.12 siguen valiendo en $ZF^{-} - P$?

x9.7. La primera inclusión en el Teorema 9.15 vale en $ZF^{-} - P$.

10. Lógica y Teoría de Modelos

A continuación veremos un "cursillo de emergencia" de *Teoría de Modelos*, una parte importantísima de la Lógica Matemática con diversas aplicaciones a otras áreas, desde la geometría algebraica y la teoría de anillos, hasta la misma Teoría de Conjuntos. Lo que sigue es una explicación extremadamente simplificada e incompleta del tema; para una presentación más exhaustiva, se pueden consultar [3, 2]; el capítulo 5 del libro de Just y Weese [5] es un resumen interesante (dado que el libro es en general muy interactivo) y el capítulo 2 de Kunen [6] da una perspectiva muy detallada. Los últimos dos libros están enfocados principalmente en aplicaciones a Teoría de Conjuntos.

10.1. Estructuras de primer orden

Los *modelos* que vamos a considerar en esta sección se denominan también ***estructuras de primer orden***. Estas son simplemente un conjunto ("universo") A equipado con algunas operaciones y relaciones (finitarias) y constantes distinguidas definidas en él. Un ejemplo paradigmático sería el de un cuerpo ordenado, como el de los racionales $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$, donde $+, \cdot$ son dos operaciones binarias, $0, 1$ son constantes y $<$ una relación binaria. La mayoría de las veces estaremos interesados en modelos ***estándares***, donde el universo es un conjunto (de conjuntos) e incluyen la relación de la pertenencia; por ejemplo $\mathbf{N} = \langle \omega, \in \rangle$.

Los modelos tienen asociadas nociones naturales de isomorfismo y de subestructura, que copian las ya conocidas para grupos, anillos, cuerpos (ordenados), etcétera. Sen $\mathbf{A} = \langle A, \dots \rangle$ y $\mathbf{C} = \langle C, \dots \rangle$ modelos. Una función $f : A \to C$ es un ***isomorfismo*** $f : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ si es una biyección y preserva las operaciones, constantes y relaciones del lenguaje. Un subconjunto $B \subseteq A$ es un ***subuniverso*** de $\mathbf{A}$ si es cerrado por sus operaciones (en particular, contiene a las constantes distinguidas), y en tal caso el ***submodelo*** determinado por B es el modelo $\mathbf{B}$ consistente de restringir todas las operaciones y relaciones de $\mathbf{A}$ a B. Por ejemplo, el subconjunto $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Q}$ es un subuniverso de **Q** (a pesar de no ser un cuerpo); restringiendo las operaciones de suma y producto a él, así como la relación de orden, obtenemos un submodelo $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$.

En este último ejemplo evidencia la necesidad de un método para referirse a una clase de estructuras que tienen operaciones y relaciones básicas *similares* (en el caso de **Q** y **Z**, dos operaciones binarias, dos constantes y una relación binaria). En tal caso, podemos fijar de antemano un ***lenguaje de primer orden*** $\mathscr{L} = \mathscr{F} \cup \mathscr{R}$, que será un conjunto de "símbolos" y una función τ que nos diga qué "aridad" tiene cada símbolo. En el caso de **Q** y **Z**, tendremos

$$\mathscr{F} := \{+, \cdot, 0, 1\} \qquad \mathscr{R} := \{<\},$$

y la función τ está dada por la siguiente tabla:

x	$+$	$\cdot$	0	1	$<$
$\tau(x)$	2	2	0	0	2

(las constantes son funciones 0-arias, es decir, sin argumentos). En la práctica, los "símbolos" pueden ser cualquier conjunto, por ejemplo ordinales; simplemente usamos "$+$" ó "$<$" como notación. En este esquema, fijado $\mathscr{L}$, una ***$\mathscr{L}$-estructura*** es un conjunto con una familia de operaciones indizadas por el lenguaje $\mathscr{L}$. En general, las operaciones de una $\mathscr{L}$-estructura se denotan por los mismos símbolos de $\mathscr{L}$, eventualmente con un supraíndice para evitar confusiones: $\mathbf{Q} = \langle \mathbb{Q}, +^{\mathbf{Q}}, \cdot^{\mathbf{Q}}, 0^{\mathbf{Q}}, 1^{\mathbf{Q}}, <^{\mathbf{Q}} \rangle$ y $\mathbf{Z} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathbf{Z}}, \cdot^{\mathbf{Z}}, 0^{\mathbf{Z}}, 1^{\mathbf{Z}}, <^{\mathbf{Z}} \rangle$. Una práctica, que como bien ejemplifican estos dos modelos, es menos ambigua pero demasiado recargada.

En el caso de la Teoría de Conjuntos, el lenguaje relevante es $\mathscr{L} = \{\in\}$, con un solo símbolo de relación binario.

10.2. La relación de satisfacción

Una vez que tenemos definido un lenguaje, podemos definir otras herramientas de expresión acerca de nuestros modelos: términos y fórmulas.

Los ***términos*** son las expresiones que se pueden escribir usando los elementos de $\mathscr{F}$ y un conjunto fijo contable $Var = \{x_0, x_1, \dots\}$ de ***variables*** (también podemos utilizar símbolos auxiliares como paréntesis y la coma "**,**" por comodidad). En el caso del lenguaje de los cuerpos ordenados, los términos se corresponderán intuitivamente con los polinomios a coeficientes naturales (recordemos que sólo tenemos a 0 y a 1 como constantes). Más correctamente, los términos son expresiones formales; a posteriori uno puede *interpretar* cada término en un modelo y obtener una función (de igual modo que un mismo polinomio representa diversas funciones polinómicas; pensar en $(x \cdot x) + (x+1)$ en $\mathbb{Z}$ ó en $\mathbb{Z}_2$). La interpretación de un término en un modelo **A** se hace reemplazando cada símbolo por la función que le corresponde en **A**; luego, al término $x_0 \cdot x_0$ el corresponderá en **Z** la función "elevar al cuadrado" $x_0 \mapsto x_0 \cdot^{\mathbf{Z}} x_0$.

Las ***fórmulas*** (más precisamente, *fórmulas de primer orden*), son las expresiones (formales, sucesiones de símbolos) que se pueden escribir usando todos los símbolos de $\mathscr{L}$ y auxiliares, variables de *Var*, la igualdad $=$, y luego combinar razonablemente estos elementos usando los conectivos lógicos tradicionales $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (negación), $\to$ (implica), $\top$, $\bot$ (verdadero y falso, resp.)... y los *cuantificadores* $\forall$ y $\exists$. La definición formal del conjunto de fórmulas es recursiva y es importante destacar algunos puntos. En primer lugar, el caso base de dicha recursión está dado por las fórmulas ***atómicas***, que tienen las formas $t_1 = t_2$ y $R(t_1,\dots,t_n)$, donde $t_1,\dots,t_n$ son términos y R es un símbolo de relación n-ario (i.e., $\tau(R) = n$). Luego podemos obtener fórmulas más complejas, por ejemplo:

$$\varphi_I := \forall x_0 \big(\neg(x_0 = 0) \to \exists x_1 (x_0 \cdot x_1 = 1)\big),$$

que dice que todo elemento distinto de 0 tiene inverso (a derecha). En segundo lugar, como las únicas variables disponibles son las que se usan con las funciones y relaciones básicas de la estructura (digamos, $\mathbf{A}$), los cuantificadores sólo se pueden referir a **elementos** del universo (y no subconjuntos de A, u otros objetos de *mayor orden*; de ahí el término "primer orden").

Dados los modelos ($\mathbf{A} = \langle A,\dots\rangle$) y fórmulas ($\varphi$) para expresar propiedades, podemos conectar ambos mundos: diremos que $\mathbf{A}$ ***satisface*** φ, y escribiremos $\mathbf{A} \models \varphi$ si al interpretar todas las variables como elementos de A y los símbolos de φ como las funciones y relaciones que corresponden en $\mathbf{A}$, entonces la propiedad φ es cierta en $\mathbf{A}$.

Como un primer ejemplo, tenemos que $\mathbf{Q} \models \varphi_I$, mientras que $\mathbf{Z}$ no satisface φ_I (en símbolos, $\mathbf{Z} \not\models \varphi_I$). La noción $\mathbf{A} \models \varphi$ también se define recursivamente, pero para hacer la recursión hay que tener en cuenta que puede haber variables "sueltas", o *libres* en la fórmula φ. En tal caso, hace falta indicar qué elementos de A interpretarán a las variables libres; es decir, es necesario indicar una función ***valuación*** $\iota : \mathit{Var} \to A$ para interpretar las variables que no sean *ligadas* por ningún cuantificador. Para ilustrar esto, veamos un par de casos de la definición recursiva de $\models$. ¿Cómo decidimos si $x_0 \cdot x_1 = 1$ es cierta en $\mathbf{Q}$? Antes debemos saber quiénes son x_0 y x_1. Para eso, usamos ι:

$$\mathbf{Q},\iota \models x_0 \cdot x_1 = 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \iota(x_0) \cdot^{\mathbf{Q}} \iota(x_1) = 1^{\mathbf{Q}}$$

Para una fórmula con un $\exists$,

$$\mathbf{Q},\iota \models \exists x_1(x_0 \cdot x_1 = 1) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \text{existe un } q \in \mathbb{Q} \text{ tal que } [\mathbf{Q},(\iota(x_1 \doteq q)) \models x_0 \cdot x_1 = 1],$$

hay que modificar la interpretación de las variables. La notación "$\iota(x_1 \doteq q)$" significa que cambiaremos el valor asignado a x_1 por ι a q:

$$f(x \doteq q) := f \setminus \{\langle x, f(x)\rangle\} \cup \{\langle x, q\rangle\}.$$

Notemos que, como debería ser, la propiedad $\mathbf{Q},\iota \models \exists x_1(x_0 \cdot x_1 = 1)$ no depende del valor que ι le asignaba a x_1. Cuando todas las variables de φ están ligadas por algún cuantificador (es decir, φ es una ***oración***),[7] entonces $\mathbf{A},\iota \models \varphi$ no depende de ι y entonces podemos escribir simplemente $\mathbf{A} \models \varphi$. Tal es el caso de la φ_I de arriba.

Observemos que todos los axiomas de *ZFC* son oraciones de primer orden en el lenguaje $\{\in\}$, así que para cualquier estructura $\mathbf{A} = \langle A, R\rangle$ que tenga una única relación binaria, tiene sentido preguntarse cuáles axiomas φ de *ZFC* valen en $\mathbf{A}$.

10.3. Ejercicios

x10.1. Sean $\mathbf{R} := \langle \mathbb{R}, +, *, 0, 1, <\rangle$ y $\mathbf{Q} := \langle \mathbb{Q}, +, *, 0, 1, <\rangle$, en el lenguaje de los anillos ordenados, con las operaciones usuales. Encontrar una oración de primer orden φ tal que $\mathbf{R} \models \varphi$ pero $\mathbf{Q} \models \neg\varphi$.

[7] Es usual escuchar la traducción literal "sentencia" (prácticamente establecida por el uso) para *sentence*. Trataremos de usar "oración", que aparentemente es más sensata.

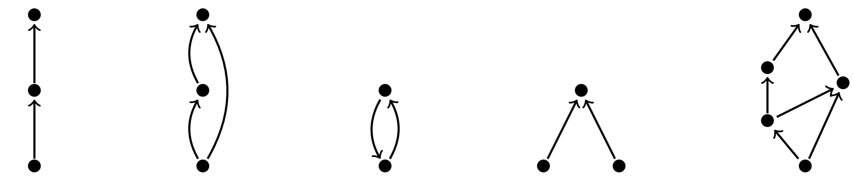
Es un teorema de Cantor que si nuestro lenguaje es $\mathscr{L} = \{<\}$, no podemos distinguirlos por ninguna oración de primer orden. Sin embargo:

x10.2. Encontrar una $\mathscr{L}$-oración que distinga a $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Z}$.

x10.3. (*) Encontrar una $\{+\}$-oración que distinga a $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (con la suma coordenada a coordenada).

x10.4. Decidir cuáles de los axiomas de *ZFC* valen en las estructuras $\langle \omega, \{(x+1,x) : x \in \omega\}\rangle$ y $\langle \mathbb{R}^{\geq 0}, <\rangle$. ¿Satisfacen "existe un conjunto vacío"?

x10.5. (*ZF*) Decidir si existen conjuntos transitivos isomorfos (como modelos estándares) a los siguientes grafos dirigidos. En tal caso, dar los conjuntos. ¿Cuáles son isomorfos a un subconjunto de un conjunto transitivo? ⫫



(a) (b) (c) (d) (e)

10.4. Submodelos y absolutez

Una propiedad crucial de las fórmulas atómicas es que su significado no cambia entre un modelo y cualquiera de sus submodelos. Este hecho es una generalización inmediata de que las relaciones y operaciones básicas de un submodelo son esencialmente las mismas que las del modelo grande. Por ejemplo, al decir que $\mathbb{Z}$ es cerrado por el producto $\cdot^{\mathbf{Q}}$ de $\mathbb{Q}$, estamos afirmando que para todo par de elementos $q_0, q_1 \in \mathbb{Z}$, el resultado de $q_0 \cdot^{\mathbf{Q}} q_1$ está en $\mathbb{Z}$. Luego, si definimos el producto de $\mathbb{Z}$ como la restricción del producto de $\mathbb{Q}$, podemos decir que si se da $q_0 \cdot^{\mathbf{Z}} q_1 = q_2$ entonces debe darse $q_0 \cdot^{\mathbf{Q}} q_1 = q_2$ y viceversa, para todos los $q_0, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Esto es lo mismo que:

$$\mathbf{Q}, \iota \models x_0 \cdot x_1 = x_2 \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathbf{Z}, \iota \models x_0 \cdot x_1 = x_2$$

para toda valuación $\iota : \mathit{Var} \to \mathbb{Z}$ (es una valuación adecuada para $\mathbb{Q}$ puesto que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$).

Una inducción sobre la construcción de términos permite generalizar esto para toda fórmula atómica:

Lema 10.1. *Supongamos que* **B** *es submodelo de* **A**. *Para toda fórmula atómica φ y una valuación $\iota : \mathit{Var} \to B$, se da*

$$\mathbf{B}, \iota \models \varphi \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \mathbf{A}, \iota \models \varphi.$$ ⫫

Introduciremos una de las definiciones más importantes para el estudio de los modelos de *ZFC*. Para una fórmula φ cuyas variables libres están entre $x_0, \dots, x_n$, la condición $\mathbf{A}, \iota \models \varphi$ sólo depende de los valores que ι le asigna a dichas variables; es común en estos casos indicar explícitamente cuáles son los valores de $\iota(x_i)$ con $i = 0, \dots, n$, escribiéndolos como parámetros de la fórmula. Por ejemplo, si $\iota(x_0) = b$, escribimos $\mathbf{A} \models \varphi(b)$ en lugar de $\mathbf{A}, \iota \models \varphi(x_0)$.

Definición 10.2. Sea $\mathbf{B}$ un submodelo de $\mathbf{A}$, ambos en el lenguaje $\mathscr{L}$. Una fórmula $\varphi(x_0,\dots,x_n)$ (con todas sus variables libres en $\{x_0,\dots,x_n\}$) es ***absoluta*** entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ si para todos los $b_0,\dots,b_n \in B$, se da

$$\mathbf{B} \models \varphi(b_0,\dots,b_n) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \mathbf{A} \models \varphi(b_0,\dots,b_n).$$

En tal caso usamos la notación $\mathbf{B} \preccurlyeq_\varphi \mathbf{A}$. Diremos que $\mathbf{B}$ es un ***submodelo elemental*** de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{A}$) si se da $\mathbf{B} \preccurlyeq_\varphi \mathbf{A}$ para toda $\mathscr{L}$-fórmula φ.

Esta definición dice que si φ es absoluta entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$, entonces significa lo mismo para los dos modelos. La noción de submodelo elemental, por su parte, puede parecer muy rebuscada; sin embargo, el siguiente resultado dice que abundan.

Teorema 10.3 (descendente de Löwenheim-Skolem)**.** *(ZFC^-) Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer y $\mathbf{A}$ un $\mathscr{L}$-modelo infinito. Para todo $X \subseteq A$ existe un submodelo elemental $\mathbf{B} \preccurlyeq \mathbf{A}$ tal que $X \subseteq B$ y* $|B| = \max(|X|, |\mathscr{L}|, \aleph_0)$.

En particular, todo modelo infinito de un lenguaje finito tiene un submodelo elemental numerable.

Cuando $\mathbf{B}$ es un submodelo elemental de $\mathbf{A}$, podemos decir que "satisfacen las mismas *fórmulas*", con parámetros en el modelo más chico. Algo más débil es que satisfagan las mismas *oraciones*; en ese caso se dice que son ***elementalmente equivalentes***; esto sucede, en particular, cuando $\mathbf{A}$ es isomorfo a $\mathbf{B}$.

Ejercicio 10.4. $\mathbb{I}_1 := \langle [0,1], < \rangle$ y $\mathbb{I}_2 := \langle [0,1] \cup (2,3], < \rangle$ son isomorfos pero hay una $\{<\}$-fórmula $\varphi(x)$ tal que $\mathbb{I}_1 \models \varphi(1)$ pero $\mathbb{I}_2 \models \neg\varphi(1)$.

10.5. Formalización de la Teoría de Modelos en *ZFC*

De igual modo que el resto de la Matemática se puede formalizar en la Teoría de Conjuntos, las nociones de las secciones anteriores también se pueden describir en ella, y se pueden demostrar los lemas y teoremas citados. En particular, las definiciones de términos, fórmulas y satisfacción proceden por recursión y se pueden formalizar usando los resultados de la Sección 2.

Para distinguir las fórmulas lógicas con las que escribimos y estudiamos *ZFC* de los conjuntos que las codifican, utilizaremos las comillas de Quine. De esta manera, una fórmula φ será codificada como un conjunto $\ulcorner\varphi\urcorner$. De hecho, también hay que codificar las variables lógicas con conjuntos, y el metaconjunto de variables *Var* también. Por ejemplo, la fórmula $x_2 = x_3$ se codificaría (siguiendo [6]) con la sucesión $\ulcorner x_2 = x_3\urcorner := \langle \ulcorner=\urcorner, \ulcorner x_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner \rangle$, donde $\ulcorner x_2\urcorner, \ulcorner x_3\urcorner \in \ulcorner Var\urcorner$.

La relación $\models$ se formaliza entonces como una "función" que toma como parámetros un modelo, una valuación y una fórmula y devuelve un valor 1 ó 0 (codificando "verdadero" y "falso", respectivamente). De hecho, esta "función" es una fórmula de cuatro variables $\mu(x,y,z,v)$ que vale solamente si x es un modelo $\mathbf{A}$, y es una función $\iota : \ulcorner Var\urcorner \to A$, z codifica una fórmula φ y v es un elemento de 2 que codifica el valor de verdad de la afirmación "$\mathbf{A}, \iota \models \varphi$".

Ejemplo 10.5. Si $\iota(\ulcorner x_n\urcorner) := n^2 + 2$ para cada $n \in \omega$, entonces $ZF^- - P$ prueba

1. $\mu(\mathbf{Q}, \iota, \ulcorner x_0 \cdot x_1 = x_2\urcorner, 1)$;

2. $\mu(\mathbf{Q}, \iota, \ulcorner x_0 \cdot x_1 = x_0 \urcorner, 0)$; y

3. $\neg\mu(\mathbf{Q}, \varnothing, \ulcorner\varphi\urcorner, i)$ para toda fórmula φ e $i \in \omega$ (puesto que $\varnothing$ no es una función con dominio $\ulcorner Var \urcorner$).

11. Modelos de la Teoría de Conjuntos

11.1. Modelos estándares

Cuando el universo A de un modelo $\mathbf{A}$ es una familia de conjuntos, y la relación $\in$ está en el lenguaje de $\mathbf{A}$, tenemos un modelo estándar. Es sumamente importante entender qué parte de la teoría de conjuntos es verdadera en $\mathbf{A}$, para saber qué construcciones se pueden llevar a cabo dentro de él, y cómo están relacionadas con el universo de conjuntos.

Para formalizar esta discusión, observemos que desde un principio estamos estudiando las consecuencias de los axiomas de *ZFC*. Así que decir "$\mathbf{A}$ es un modelo estándar", significa que podemos probar usando los axiomas que

$$\exists A, E : \mathbf{A} = \langle A, E\rangle \land \forall a, b \in A \big(\langle a, b\rangle \in E \leftrightarrow a \in b\big).$$

Un detalle no menor que hemos estado pasando por alto, es que estamos utilizando toneladas de definiciones y para muchas de ellas introdujimos nuevos símbolos que no están en el lenguaje original $\{\in\}$ de *ZFC*. Por ejemplo, el nuevo símbolo de función binaria $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en la fórmula anterior. Claro, se puede eliminar usando el constructor de pares no ordenados:

$$\exists A, E : \mathbf{A} = \{\{A\}, \{A, E\}\} \land \forall a, b \in A \big(\{\{a\}, \{a, b\}\} \in E \leftrightarrow a \in b\big).$$

Escribir esta última fórmula en lenguaje $\{\in\}$ puede ser un poco "rompe-esferas".[8]

Prosiguiendo con nuestro análisis, quisiéramos entender qué propiedades tiene un modelo estándar $\mathbf{A}$. Dado que su lenguaje incluye a $\in$, podemos preguntarnos si alguno de sus elementos satisface la siguiente fórmula:

$$\varphi_{\mathrm{e}}(v) := \forall w \neg(w \in v) \tag{10}$$

Apenas la vemos, la identificamos como "la definición del conjunto vacío". En una perspectiva *ingenua*, intuitiva o platonista, diremos que en el "universo de todos los conjuntos" esta fórmula es una definición de $\varnothing$, puesto $\varphi_{\mathrm{e}}(\varnothing)$ es verdadero y es el único conjunto que la satisface. Formalmente, lo que sabemos simplemente es que los axiomas de *ZFC* (específicamente, los axiomas de Existencia y Extensionalidad) demuestran la fórmula

$$\exists! v\, \varphi_{\mathrm{e}}(v). \tag{11}$$

(En este caso diremos que φ_{e} ***define una constante***). Luego podemos *expandir* nuestro lenguaje con una nueva constante $\varnothing$, y un nuevo ***axioma de definición***:

$$v = \varnothing \leftrightarrow \varphi_{\mathrm{e}}(v). \tag{12}$$

[8] *A pain in the neck, and probably much deeper!* como decía un querido colega alemán.

En particular, esto significa que cualquier modelo $\mathbf{A}$ de los dos primeros axiomas de *ZFC* satisfará (11), y se va a poder interpretar inequívocamente la nueva constante en $\mathbf{A}$, de manera que se cumpla $\mathbf{A} \models \varphi_{\mathrm{e}}(\varnothing^{\mathbf{A}})$. Si $\mathbf{A} = \langle A, \in^{\mathbf{A}} \rangle$ es un modelo estándar, entonces de hecho el elemento de A denotado por $\varnothing^{\mathbf{A}}$ es un conjunto. La pregunta inmediata es, ¿es $\varnothing^{\mathbf{A}}$ el conjunto vacío? No necesariamente.

Ejemplo 11.1. Tomemos $A = \{3, \{2,3\}, \{3,4\}\}$. Es fácil ver que

$$\langle A, \in^{\mathbf{A}} \rangle \models \exists! v\, \varphi_{\mathrm{e}}(v), \text{ y, más aún } \langle A, \in^{\mathbf{A}} \rangle \models \varphi_{\mathrm{e}}(3),$$

así que es posible definir $\varnothing^{\mathbf{A}}$, y resulta igual a $3 = \{0,1,2\} \neq \varnothing$. Formalmente, la implicación

$$(\mathbf{A} \text{ es estándar con universo } A = \{3, \{2,3\}, \{3,4\}\}) \longrightarrow \mathbf{A} \models \ulcorner \exists! v\, \varphi_{\mathrm{e}}(v) \wedge \varphi_{\mathrm{e}}(3) \urcorner$$

es un teorema de $ZF^{-} - P$. Sin embargo, la fórmula $\varphi_{\mathrm{e}}(3)$ no es un teorema (de hecho, su negación lo es).

Esta discusión se puede aplicar a funciones (de hecho, una constante es una función sin argumentos). Por ejemplo, con los axiomas de Extensionalidad, Separación y Pares se demuestra $\forall x, y \exists! z\, \varphi_{\mathrm{p}}(x,y,z)$, donde

$$\varphi_{\mathrm{p}}(x,y,z) := \forall w\, (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y). \tag{13}$$

Es decir, φ_{p} ***define una función***. Esto nos permite introducir el símbolo de función $\{\cdot,\cdot\}$ mediante un axioma de definición. En general, considerando los axiomas con los que estemos trabajando en cada caso, habrá algunas funciones definibles, y para cada una de ellas una fórmula que la defina. A partir de ahora, vejaremos impunemente a la notación, utilizando $\in$ para denotar la $\in^{\mathbf{A}}$ de un modelo estándar $\mathbf{A}$, y omitiremos las comillas de Quine de las fórmulas formalizadas en *ZFC*.

Definición 11.2. Sea A un conjunto. Una fórmula $\varphi(\bar{x})$ es ***absoluta para*** A si

$$\forall x_0, \dots, x_n \in A : \big(\langle A, \in \rangle \models \varphi(x_0, \dots, x_n)\big) \leftrightarrow \varphi(x_0, \dots, x_n).$$

Es un buen ejercicio poner nuevamente las comillas de Quine que faltan en la fórmula anterior. Entonces, la fórmula $\varphi_{\mathrm{e}}(v)$ no es absoluta para $\{3, \{2,3\}, \{3,4\}\}$.

Definición 11.3. Una función definida por la fórmula $\varphi(\bar{x}, z)$ es ***absoluta*** para un conjunto A si se da $\langle A, \in \rangle \models \forall \bar{x} \exists! z : \varphi(\bar{x}, z)$ y además $\varphi(\bar{x}, z)$ es absoluta para A.

El problema con el modelo estándar A del Ejemplo 11.1 es que "le faltaban elementos" para darse cuenta que 3 no está vacío. Si hubiera tenido alguno de (o todos) los elementos del 3, no hubiera pasado esto. Tener todos los elementos de los elementos es exactamente ser transitivo, y soluciona el problema de absolutez para una importante cantidad de fórmulas. Pero esto lo discutiremos en la Sección 11.5, ya en el contexto de clases propias.

11.2. Ejercicios

En el Ejemplo 11.1, vimos un caso donde la fórmula φ_{e} definía una función (constante, $\varnothing^{A}$), pero no era absoluta.

x11.1. Probar que φ_{p} no es absoluta para A de dicho Ejemplo.

x11.2. Encontrar un ejemplo de conjunto $B \neq \varnothing$ para el cual la fórmula φ_{p} es absoluta pero no define una función.

x11.3. Supongamos que $A \subseteq B$ y que la función definible f es absoluta para ambos. Entonces $\mathbf{A} = \langle A, \in, f^{\mathbf{A}} \rangle$ es submodelo de $\mathbf{B} = \langle B, \in, f^{B} \rangle$.

11.3. Teoremas de Gödel y Consistencia Relativa

Simplemente enunciaremos estos famosos resultados, con algunas consecuencias para el estudio de la Teoría de Conjuntos.

Cualquier teoría (matemática o no) que valga la pena considerar debe ser ***consistente***: no debe llevar a contradicciones. La formalización de este concepto involucra definir rigurosamente *prueba*, y esto se puede hacer de manera satisfactoria para la lógica de primer orden (a los efectos prácticos de este resumen, basta entender que una prueba es una sucesión finita de fórmulas). En este contexto, una ***teoría*** es simplemente un conjunto de oraciones de primer orden de un lenguaje fijo $\mathscr{L}$. El Teorema de Completitud de Gödel dice que para saber que una teoría es consistente basta encontrar un modelo de ella.

Teorema 11.4 (de Completitud de Gödel)**.** *Una teoría Φ es consistente si y sólo si existe un modelo $\mathbf{A}$ tal que para toda $\varphi \in \Phi$, $\mathbf{A} \models \varphi$.* ⊞

Perfecto; como la Matemática se formaliza en la teoría de primer orden *ZFC*, basta encontrar un modelo de esa teoría. Chanfle:

Teorema 11.5 (segundo de Incompletitud de Gödel)**.** *Una teoría consistente Φ que permita formalizar a los números naturales con la adición y el producto, no puede probar su propia consistencia.* ⊞

Más fuertemente, hay una fórmula de primer orden $\mathrm{Con}(ZFC)$ en el lenguaje $\{\in\}$, que es cierta si y sólo si *ZFC* es consistente, pero

- si *ZFC* es consistente, $\mathrm{Con}(ZFC)$ no se puede demostrar con los métodos de *ZFC* (eso querría decir que no se puede probar matemáticamente, a menos que empecemos a creer en nuevos axiomas); y
- si alguien encuentra una prueba en *ZFC* de $\mathrm{Con}(ZFC)$, entonces *realmente ZFC era inconsistente.*

Un bajón.

Pero esto nos deja la miserable posibilidad de poder demostrar afirmaciones calificadas de la forma "Si *ZFC* fuera consistente, entonces $ZFC + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ sería consistente". Esto se denomina una prueba de ***consistencia relativa***.

11.4. Modelos de clase y relativización

Como referencia general para esta sección, recomiendo leer Kunen [7], pp. 99–102.

El Segundo Teorema de Incompletitud obstruye la búsqueda de un modelo de la Teoría de conjuntos (o más bien, probar en *ZFC* la existencia de un modelo de *ZFC*). Sin embargo, podemos avanzar utilizando *modelos de clase*, es decir, modelos (impropios) cuyo universo sea una clase propia (valga el oxímoron).

Una clase, como ya dijimos, es simplemente una fórmula, o bien, intuitivamente, una "propiedad" $\psi(x)$. Y podemos definir, mediante otras fórmulas, clases relacionales entre elementos que cumplen con la propiedad ψ. Un ejemplo es la relación de inclusión $x \subseteq y$. Está dada por la fórmula $\forall z\,(z \in x \to z \in y)$ (no es un conjunto de pares).

Consideremos el ejemplo del "poset" de los ordinales $\mathbf{Ord} := \langle \mathsf{Ord}, < \rangle$. Aquí la $\psi(x)$ es "x es ordinal" y $x < y$ también viene definida por una fórmula. Como todas las cosas que involucran clases, debemos tener mucho cuidado manipulando estos objetos. En primer lugar, no se puede hacer un par ordenado de fórmulas (no son conjuntos). Tampoco hay un conjunto que tenga todos los conjuntos con la propiedad de ser un ordinal. Más seriamente, no podemos utilizar nuestra noción de satisfacción "$\models$" puesto que está definida como una fórmula μ cuyos parámetros deben ser conjuntos. Para ejemplificar cómo se puede salvar esta situación, tratemos de expresar que la estructura **Ord** satisface la oración $\varphi_N := \forall x(x = 0 \vee 0 < x)$, que dice que el 0 es el menor elemento. Intuitivamente, esto quiere decir que para todo $\alpha \in \mathsf{Ord}$, $\alpha = 0$ ó $0 \in \alpha$. De hecho, para decidir el valor de verdad de φ_N en **Ord** estamos haciendo exactamente lo que dicta la definición recursiva de $\models$, pero la diferencia estriba en que

- sólo podemos hacer esto *de a una fórmula por vez*; y
- estamos trabajando todo el tiempo con fórmulas (una para Ord, otra para $<$,...).

Es decir, tomamos la fórmula φ_N y la manipulamos sintácticamente para obtener otra, $\varphi_N^{\mathbf{Ord}}$, que codifica la afirmación "φ_N vale en la estructura **Ord**".

Las reglas para obtener $\varphi_N^{\mathbf{Ord}}$ a partir de φ_N son muy simples y hasta cierto punto, obvias. Para ponerlas en contexto, necesitamos una noción más. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden y sea Γ una familia de axiomas de *ZFC*. Una ***interpretación relativa* A *de* $\mathscr{L}$ *en* Γ** o ***modelo de clase de* $\mathscr{L}$ *en* Γ** es una clase A no vacía y una asignación de clases a cada símbolo de $\mathscr{L}$, de manera que a los símbolos de funciones les correspondan clases funcionales de la misma aridad, y lo mismo con las relaciones. Esto significa que la teoría Γ prueba:

- $A \neq \varnothing$; (i.e., si A está dada por la fórmula $\psi(x)$, entonces Γ prueba $\exists x\, \psi(x)$).
- Si al símbolo de función $f(\bar{x})$ le corresponde la clase $F(\bar{x}, z)$, entonces Γ prueba $\forall \bar{x} \exists! z F(\bar{x}, z)$ (y luego ese único z es el valor de $f(\bar{x})$).

En nuestra próxima definición nos restringiremos al caso en el que $\mathscr{L}$ consta de un único símbolo de relación binaria, y que interpretamos con la fórmula $x \in y$. Una tal interpretación relativa está completamente determinada por la clase A y los axiomas relevantes de la teoría de conjuntos Γ.

Definición 11.6. Sea A una clase. La ***relativización de la fórmula* φ *a*** A, φ^A, se define recursivamente de la siguiente manera:

1. Si $\varphi(\bar{x})$ es atómica, $\varphi^A := \varphi$.
2. $(\varphi \wedge \psi)^A := \varphi^A \wedge \psi^A$, y análogamente con los otros conectivos proposicionales.
3. $(\forall z\, \psi(z,\bar{x}))^A := \forall z \in A\, \big(\psi(z,\bar{x})^A\big)$, y lo mismo con $\exists$.

Esta definición se puede extender a modelos de clase $\mathbf{A}$ de lenguajes $\mathscr{L}$ más complejos, pero hay que poner más casos para las fórmulas atómicas.

Ejercicio 11.7. Probar que para toda φ en el lenguaje $\{\in\}$, φ y φ^V son lógicamente equivalentes.

Un resultado intuitivamente claro pero molesto de probar es que la relativización provee de una generalización de la relación $\models$:

Teorema 11.8. *Para toda fórmula $\varphi(\bar{x})$, $ZF^{-} - P$ prueba:*

$$\forall \mathbf{A} = \langle A, \in \rangle \text{ estándar}, \forall \bar{x} \in A : (\mathbf{A} \models \ulcorner \varphi \urcorner(\bar{x})) \leftrightarrow \varphi^A(\bar{x}).$$

El resultado de lógica que hace útiles a los modelos de clase es la siguiente observación:

Teorema 11.9. *Sea $\mathbf{A}$ un modelo de clase de $\mathscr{L}$ en Γ. Hay un algoritmo tal que dadas una $\mathscr{L}$-fórmula φ y una demostración de ella en la lógica de primer orden, devuelve una demostración de φ^A a partir de los axiomas de Γ.*

Para entender más sobre cómo se definen algoritmos de este tipo, y la noción formal de demostraciones en la lógica de primer orden, consultar un texto de lógica como [3, 6].

Corolario 11.10. *Sean ψ una oración y Γ un conjunto oraciones, ambos en el lenguaje $\{\in\}$, y supongamos que A es una clase tal que Γ prueba*

1. *$A \neq \varnothing$; y*
2. *φ^A para toda $\varphi \in \Gamma \cup \{\psi\}$.*

Luego, si $\Gamma \cup \{\psi\}$ es inconsistente entonces Γ es inconsistente.

Demostración. Supongamos que $\Gamma \cup \{\psi\}$ es inconsistente. Esto quiere decir que hay una prueba de una contradicción $\chi \wedge \neg\chi$ partiendo desde dichos axiomas. Como una demostración involucra sólo finitas fórmulas, hay $\varphi_1, \dots, \varphi_n \subseteq \Gamma \cup \{\psi\}$ tal que la implicación $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \chi \wedge \neg\chi$ es un teorema de la lógica. Como Γ prueba que $A \neq \varnothing$, A determina un modelo de clase de $\{\in\}$ en Γ. Entonces podemos aplicar el algoritmo del Teorema 11.9, obteniendo el nuevo teorema lógico

$$(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \chi \wedge \neg\chi)^A = \varphi_1^A \wedge \ldots \wedge \varphi_n^A \to \chi^A \wedge \neg\chi^A.$$

Ahora bien, por hipótesis Γ prueba todos los términos del antecedente, así que entonces debe probar el consecuente. Pero $\chi^A \wedge \neg\chi^A$ es una contradicción, luego Γ es inconsistente. ⊥⊥

Utilizaremos más adelante este Corolario para demostrar que el Axioma de Fundación no introduce contradicciones (nuevas). Para ello, probaremos en ZF^{-} que la clase no vacía WF satisface φ para toda φ de ZF (i.e., en ZF^{-} probaremos φ^{WF}). Luego, si ZF es inconsistente es porque ZF^{-} ya lo era.

11.5. Modelos transitivos

Como vimos en la Sección 11.4, toda clase no vacía A determina un "modelo $\langle A, \in \rangle$", o más precisamente, una interpretación relativa. Esta noción generaliza a los modelos estándares (sobre conjuntos), y los resultados de esta sección van a valer también para estos últimos. Llamaremos *modelos de clase* a estas interpretaciones relativas, abusando un poco de la notación a menudo diciendo simplemente *modelos*.

En este contexto, una clase A será llamada ***modelo transitivo*** si es transitiva. Los modelos transitivos son extremadamente útiles puesto que para ellos hay una gran cantidad de conceptos que son absolutos. Para aplicar esta idea, primero escribamos una generalización común de las Definiciones 10.2 (en el caso $\mathscr{L}$ que contiene sólo una relación binaria) y 11.2, reemplazando la noción $\models$ por relativizaciones donde corresponda.

Definición 11.11. Sean A y B clases con $B \subseteq A$. Una fórmula $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ (con todas sus variables libres en $\{x_0, \dots, x_n\}$) es ***absoluta*** entre B y A si para todos los $b_0, \dots, b_n \in B$, se da

$$\varphi^B(b_0, \dots, b_n) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \varphi^A(b_0, \dots, b_n).$$

Diremos que φ es absoluta para B (a secas) si es absoluta entre B y V; esto es, si $\varphi^B \leftrightarrow \varphi$.

Mantendremos la notación $B \preccurlyeq_\varphi A$ para el caso de clases.

Definición 11.12. Una fórmula φ en el lenguaje $\{\in\}$ es Δ_0 si todos sus cuantificadores están ***acotados***: son de la forma $\exists z \in x$ ó $\forall z \in x$, con $x \neq z$.

Lema 11.13. *Toda fórmula Δ_0 es absoluta entre modelos transitivos.*

Demostración. Las fórmulas Δ_0 se construyen recursivamente comenzando por las atómicas, usando conectivos proposicionales libremente y siempre que φ sea Δ_0, la fórmula $\forall z (z \in x \to \varphi)$ será Δ_0 (el caso con $\exists$ se obtiene usando dos negaciones).

Sean ahora A y B clases con $B \subseteq A$. Queremos ver que para toda fórmula φ, se da $\varphi^B \leftrightarrow \varphi^A$ siempre que las variables libres de estas fórmulas se ocupen con elementos de B. Las fórmulas atómicas son absolutas entre modelos transitivos por (la versión para clases de) el Lema 10.1, lo cual nos da el caso base. Para los conectivos lógicos, el resultado se sigue de que la relativización los respeta a todos; por ejemplo, en el caso de la disyunción:

$$\begin{aligned}
(\varphi \lor \psi)^B &= \varphi^B \lor \psi^B && \text{def. de relativización,} \\
&\leftrightarrow \varphi^A \lor \psi^A && \text{hip. inductiva, } \varphi \text{ y } \psi \text{ absolutas,} \\
&= (\varphi \lor \psi)^A && \text{def. de relativización.}
\end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que φ es absoluta entre modelos transitivos y lo probemos para $\forall z (z \in x \to \varphi)$; notar que x es una variable libre de esta fórmula. Sea, entonces $b \in B$. Veremos que $(\forall z (z \in b \to \varphi))^B \leftrightarrow \forall z (z \in b \to \varphi)^A$.

$$\begin{aligned}
(\forall z (z \in b \to \varphi))^B &= \forall z \in B (z \in b \to \varphi^B) && \text{def. de relativización} \\
&\leftrightarrow \forall z \in B (z \in b \to \varphi^A) && \text{hip. inductiva} \\
&\leftrightarrow \forall z \in A (z \in b \to \varphi^A) && (\dagger) \\
&= (\forall z (z \in b \to \varphi))^A && \text{def. de relativización.}
\end{aligned}$$

En la equivalencia marcada con (†), la implicación inversa sucede simplemente porque $B \subseteq A$; y la directa, puesto que si $z \in b \in B$ entonces debe ser que $z \in B$ por ser éste transitivo. ⊞

La noción de una expansión de un modelo mediante axiomas de definición (Sección 10) se puede aplicar a los modelos transitivos sin ningún problema, y obtenemos así interpretaciones relativas de lenguajes $\mathscr{L}$ más grandes, como se comentaba alrededor de la Definición 11.6. Para estos modelos expandidos se puede probar una versión más general del Lema 11.13 de absolutez. Para ello, estipulemos:

Definición 11.14. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje que contiene a $\in$. Una $\mathscr{L}$-fórmula es Δ_0 si se obtiene a partir de las fórmulas atómicas utilizando conectivos proposicionales y cuantificaciones acotadas:

> Si φ es Δ_0 y t es un término que no contiene la variable z, entonces $\forall z(z \in t \to \varphi)$ es Δ_0.

La versión generalizada del Lema 11.13 es la siguiente.

Lema 11.15. *Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje que contiene a $\in$, $\mathbf{A} = \langle A, \in, \dots \rangle$ un modelo en el lenguaje $\mathscr{L}$ y $\mathbf{B}$ un submodelo transitivo de $\mathbf{A}$. Luego para toda $\mathscr{L}$-fórmula Δ_0 φ se cumple $\varphi^{\mathbf{A}} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{B}}$.* ⊞

Probar este lema utilizando las ideas del Lema 11.13 es bastante instructivo; la solución está en [7, I.16.2]. La demostración es igual tanto para el caso de modelos transitivos basados en una clase (interpretaciones relativas) o modelos cuyo universo es un conjunto, así que uno puede trabajar primero en el marco más cómodo y después transportar la prueba al otro.

Corolario 11.16. *Toda $\mathscr{L}$-fórmula Δ_0 es absoluta entre modelos transitivos.*

Para aplicar este Corolario con un par de modelos transitivos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$, es necesario comprobar que $\mathbf{B}$ sea submodelo de $\mathbf{A}$. En el caso que ambos sean expansiones de modelos $\langle B, \in \rangle$ y $\langle A, \in \rangle$ mediante definiciones, esto equivale a decir que dichas definiciones significan lo mismo en ambos modelos (como se observaba antes del Lema 10.1). Lo veamos en un caso práctico.

Ejemplo 11.17. Sean B y A dos clases transitivas con $B \subseteq A$. La propiedad "$x \subseteq y$" está definida como la fórmula Δ_0 $\forall z(z \in x \to z \in y)$, y por el Lema 11.13 es absoluta entre B y A. Como esta fórmula significa lo mismo tanto en B como en A (siempre que $x, y \in B$), va a resultar que la relación $\subseteq^B$ será la restricción de $\subseteq^A$ a la clase B. En conclusión, $\mathbf{B} := \langle B, \in, \subseteq^B \rangle$ es submodelo de $\mathbf{A} := \langle A, \in, \subseteq^A \rangle$. El Corolario 11.16 nos dice ahora que las fórmulas Δ_0 en el lenguaje expandido $\{\in, \subseteq\}$ son absolutas entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$.

Lema 11.18. *Sea M una clase transitiva no vacía que satisface los axiomas de Separación y Pares. Entonces $\varnothing$ y la operación $x, y \mapsto \{x, y\}$ son absolutos para M.*

Demostración. Como dijimos más arriba, con los axiomas citados se pueden probar $\exists! v\, \varphi_{\mathrm{e}}(v)$ y $\forall x, y \exists! z \varphi_{\mathrm{p}}(x, y, z)$. Nuestra intención es aplicar el Lema 11.13.

Ahora bien, las fórmulas (10) y (13) no son Δ_0, pero son lógicamente equivalentes a

$$\forall w \in v\,(w \neq w)$$
$$(x \in z) \wedge (y \in z) \wedge \forall w \in z\,(w = x \vee w = y),$$

respectivamente, que sí lo son. En conclusión, las fórmulas (10) y (13) son absolutas entre M y V, y tenemos el resultado. ⊞

Ejercicio 11.19. Probar que la unión binaria $\cup$ es absoluta entre los modelos transitivos de Extensionalidad, Pares, Separación y Unión. Ⓢ

Lema 11.20. *Sea M transitiva que satisfaga Extensionalidad, Pares, Separación y Unión. La operación de sucesor $x \mapsto S(x) = x \cup \{x\}$ es absoluta para M.*

Demostración. Aquí ejemplificaremos el uso de $\mathscr{L}$-formulas absolutas.

Dada M en las hipótesis, podemos aplicar el Ejercicio x11.3 con el Lema 11.18 y el Ejercicio 11.19 para concluir que $(M, \in, \{\cdot,\cdot\}^M, \cup^M)$ es submodelo de $(V, \in, \{\cdot,\cdot\}, \cup)$. Por lo tanto, la $\mathscr{L}$-fórmula atómica $y = x \cup \{x, x\}$ es absoluta entre M y V. ⊥

11.6. Ejercicios

x11.4. Identificar cuáles instancias de Separación debe satisfacer M para obtener la conclusión del Lema 11.18.

x11.5. Probar el Lema 11.20 utilizando el Lema 11.13 directamente (i.e., sin hablar de expansiones del lenguaje).

x11.6. Probar que si φ es Δ_0, y t es un término que no contiene a z, entonces $\exists! z \in t : \varphi$ es lógicamente equivalente a una fórmula Δ_0.

x11.7. Probar en ZF^- que las siguientes nociones son absolutas entre modelos transitivos:

a) x es un conjunto de cardinal a lo sumo 2.

b) x es un par ordenado.

c) x es una relación.

d) x es una función.

e) $f : x \to y$.

f) $f : x \to y$ es una biyección.

x11.8. $(ZF^- - P)$ Probar que si M es una clase que cumple $\forall \mathscr{F} \in M : \bigcup \mathscr{F} \in M$, entonces el Axioma de Unión vale en M.

x11.9. La noción "f es un isomorfismo entre las estructuras $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$" es absoluta entre modelos transitivos.

x11.10. Probar en ZF que las siguientes nociones son absolutas entre modelos transitivos:

a) x es un ordinal.

b) x es un ordinal límite.

c) $x = \omega$.

x11.11. (ZF) Probar que si M es una clase transitiva, entonces Ord^M es un ordinal o bien es igual a Ord.

x11.12. Probar que si φ es Δ_0, y t es un término que no contiene a z, entonces $\exists! z \in t : \varphi$ es lógicamente equivalente a una $\mathscr{L}$-fórmula Δ_0.

La composición de funciones definidas por fórmulas Δ_0 son absolutas entre modelos transitivos. Pero, por ejemplo, la función $D(n) := n + n$ sobre ω no tiene una definición Δ_0 (la prueba de esto escapa de los temas del curso).

x11.13. (*) Probar en *ZF* que D es composición de dos funciones definidas por fórmulas Δ_0.

x11.14. Supongamos que M es un modelo transitivo de *ZFC*. Luego para cada ordinal $\alpha \in M$, $M \models \exists x : x = \omega_\alpha$. Luego hay un elemento ω_α^M de M que satisface esta fórmula. Si ahora $N \supseteq M$ es otro modelo transitivo de *ZFC* y ω_α^N es el elemento correspondiente, probar que $\omega_\alpha^M \leq \omega_\alpha^N$.

Si M es un modelo transitivo de *ZFC* y $N \preccurlyeq M$ un submodelo elemental contable, N puede no ser transitivo, i.e., pueden existir conjuntos $X \in N$ que no sean subconjuntos de N. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

x11.15. (*) Si $N \preccurlyeq M \models ZFC$, M es transitivo y $N \models$ "X es contable" entonces $X \subseteq N$.

Muchas veces es necesario considerar copias isomorfas de una estructura de dentro de otra; es decir, en lugar de la inclusión consideramos en general una *incrustación* (o, en inglés, "embedding"). La generalización correspondiente de los submodelos elementales se obtiene usando mapas $j : B \to A$ llamados ***incrustaciones elementales***, que cumplen

$$\varphi^B(b_0,\dots,b_n) \qquad \text{si y sólo si} \qquad \varphi^A(j(b_0),\dots,j(b_n)).$$

para toda fórmula φ y elementos $b_1,\dots,b_n \in B$.

x11.16. Supongamos que $A \subseteq B$ y $j : B \to A$ es una incrustación elemental. Probar que si la función f es absoluta, entonces

$$j(f(b_1,\dots,b_n)) = f(j(b_1),\dots,j(b_n))$$

para $b_1,\dots,b_n \in B$.

11.7. Modelos de fragmentos de *ZFC*

Compilamos a continuación criterios para decidir si una clase satisface los axiomas de *ZFC*.

Lema 11.21 ([7, II.2.4])**.** *($ZF^- - P$) Para una clase M cualquiera:*

1. *Si M es transitiva, entonces el Axioma de Extensionalidad vale en M.*
2. *Si $M \subseteq \mathrm{WF}$, entonces el Axioma de Fundación vale en M.*
3. *Si $\forall z \in M \forall y \subseteq z\, (y \in M)$, entonces el Axioma de Separación vale en M.*
4. *Si $\forall x, y \in M\, (\{x,y\} \in M)$, entonces el Axioma de Pares vale en M.*
5. *Si $\forall \mathscr{F} \in M (\bigcup \mathscr{F} \in M)$, entonces el Axioma de Unión vale en M.*
6. *Supongamos que M es transitiva y para todas las funciones f se da: si $\mathrm{dom}(f) \in M$ e $\mathrm{img}(f) \subseteq M$, entonces $\mathrm{img}(f) \in M$. Entonces el Axioma de Reemplazo vale en M.* ◫

Ejercicio 11.22. Escribir la relativización de Separación a una clase arbitraria M, y simplificar para el caso de que M sea transitiva.

A continuación, trabajaremos en ZF^-.

Lema 11.23 ([7, II.2.8]). *Sea M una clase transitiva. Entonces si $\forall x \in M\,((\mathscr{P}(x) \cap M) \in M)$, entonces el Axioma de Partes vale en M; y si M satisface Separación, también vale la recíproca.* ⊞

Lema 11.24. *Sea M una clase transitiva que satisface los axiomas de Separación, Pares y Unión. Entonces*

1. *El Axioma de Elección vale en M si y sólo si toda familia $\mathscr{F} \in M$ de conjuntos disjuntos tiene un conjunto de elección en M.*
2. *Si $\omega \in M$, el Axioma de Infinito vale en M.*

Demostración. El enunciado de AC es lógicamente equivalente a la fórmula $\forall \mathscr{F}\, \exists C\, \varphi(\mathscr{F}, C)$ donde

$$\varphi(\mathscr{F}, C) := \big(\forall A, B \in \mathscr{F} : A \neq \varnothing \wedge \neg \exists t \in A\,(t \in B)\big) \to \forall A \in \mathscr{F}\,\big(\exists! z \in A\,(z \in C)\big).$$

El Lema 11.18 (junto al Ejercicio x11.12) asegura que esta fórmula es absoluta para toda M que satisfaga las hipótesis pues es Δ_0 en el lenguaje $\{\in, \varnothing\}$. Luego la relativización de AC a M es $\forall \mathscr{F} \in M\, \exists C \in M\, \varphi(\mathscr{F}, C)$, que es lo que pedía el enunciado.

Supongamos ahora que $\omega \in M$. La propiedad de ser inductivo,

$$\psi(I) := \varnothing \in I \wedge \forall x \in I (S(x) \in I),$$

es Δ_0 en el lenguaje $\{\in, \varnothing, S\}$. Como el Lema 11.20 nos asegura que S también es absoluto, entonces $\psi(I)$ es absoluta para M. Luego ω satisface el Axioma de Infinito relativizado a M. ⊞

Teorema 11.25.
1. WF *es un modelo de clase de los axiomas de ZF.*
2. *(AC)* WF *es un modelo de clase de los axiomas de ZFC.*
3. *Para todo $\gamma \in \mathsf{Lim}$ mayor que ω, $R(\gamma)$ es un modelo de Z. Suponiendo AC, es modelo de ZC.* ⊞

Corolario 11.26. *Si ZF^- es consistente, entonces ZF lo es. Igualmente con ZFC^- y ZFC.*

Cabe destacar que la primera parte podría interpretarse diciendo que el enunciado

> "Si hay un modelo de ZF^-, entonces hay un modelo de ZF."

es un teorema de ZF^- (o de alguna teoría más débil, como $ZF^- - P$ ó Z). Sin embargo, cualquiera de estas teorías presupone, de algún modo, la existencia de conjuntos infinitos. La prueba que daremos es *finitaria*, esto es, esencialmente "combinatoria" y sólo depende de objetos finitos. Por tal motivo, el resultado es más fuerte que la interpretación anterior.

Demostración del Corolario. El Teorema 11.25(1) indica que ZF^- prueba φ^{WF} para todo $\varphi \in ZF$, y que $\mathsf{WF} \neq \varnothing$. Por el Corolario 11.10, si ZF es inconsistente entonces ZF^- lo es. Y de hecho, (vía el Teorema 11.9) existe un algoritmo que transforma cualquier prueba de una contradicción en ZF en una prueba de contradicción en ZF^-.

La segunda parte es igual. ⊞

Lema 11.27. *(AC) Si $\kappa > \omega$ es regular, $H(\kappa)$ es un modelo de ZF − P.*

Demostración. Iremos comprobando que se dan las condiciones suficientes del Lema 11.21.

Sea $b \in a \in H(\kappa)$; en particular $|\mathrm{trcl}(a)| < \kappa$. Por el Ejercicio 9.4(3), $\mathrm{trcl}(b) \subseteq \mathrm{trcl}(a)$, así que concluimos que $H(\kappa)$ es transitivo. Similarmente se puede ver que si $b \subseteq a \in H(\kappa)$, entonces $b \in H(\kappa)$. Luego, $H(\kappa)$ satisface Extensionalidad y Separación.

Por definición, $H(\kappa) \subseteq \mathsf{WF}$, así que también satisface Fundación.

Por el Ejercicio x9.5, $H(\kappa)$ satisface las hipótesis del Lema 11.21 para Reemplazo, así que es modelo de ese esquema de axiomas.

Por el Lema (∗) 2.2, $\mathrm{trcl}(\{x,y\}) = \mathrm{trcl}(x) \cup \mathrm{trcl}(y) \cup \{x,y\}$. Si $x,y \in H(\kappa)$, entonces

$$|\mathrm{trcl}(\{x,y\})| \leq |\mathrm{trcl}(x)| + |\mathrm{trcl}(y)| + 2 < \kappa,$$

así que $\{x,y\} \in H(\kappa)$. En conclusión el Axioma de Pares vale en $H(\kappa)$.

Es fácil ver que $\bigcup\mathscr{F} \subseteq \mathrm{trcl}(\mathscr{F})$. Luego, si $\mathscr{F} \in H(\kappa)$ entonces

$$|\mathrm{trcl}(\bigcup\mathscr{F})| \leq |\mathrm{trcl}(\mathrm{trcl}(\mathscr{F}))| = |\mathrm{trcl}(\mathscr{F})| < \kappa,$$

con lo que $\bigcup\mathscr{F} \in H(\kappa)$.

En este punto ya sabemos que $H(\kappa)$ está en las hipótesis del Lema 11.24. Primero, $|\mathrm{trcl}(\omega)| = |\omega| = \omega < \kappa$, así que $\omega \in H(\kappa)$ y entonces satisface Infinito. Para *AC*, sea $\mathscr{F} \in H(\kappa)$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos y (usando *AC* en V) sea C un conjunto de elección para $\mathscr{F}$. Como $C \subseteq \bigcup\mathscr{F} \in H(\kappa)$, concluimos que $C \in H(\kappa)$. ⊔⊓

Lema 11.28. *(AC) Sea $\kappa > \omega$ regular. Entonces el Axioma de Partes vale en $H(\kappa)$ si y sólo si κ es inaccesible.*

Demostración. Si κ es inaccesible, $H(\kappa) = R(\kappa)$ por el Teorema 9.15 y luego satisface el Axioma de Partes por el Teorema 11.25. Si no es inaccesible, hay $\lambda < \kappa$ tal que $2^\lambda \geq \kappa$. Entonces $\lambda \in H(\kappa)$ pero

$$\mathscr{P}(\lambda) \cap H(\kappa) = \mathscr{P}(\lambda) \notin H(\kappa),$$

lo que contradice la recíproca al Lema 11.23. ⊔⊓

Corolario 11.29. *Trabajando en ZFC$^-$:*

1. *$H(\aleph_1)$ es modelo de ZFC − P y de la negación del Axioma de Partes; luego este axioma no se sigue de los otros.*

2. *Si κ es inaccesible, $H(\kappa) = R(\kappa)$ es modelo de ZFC.*

Se pueden probar en *ZFC* afirmaciones más precisas sobre $H(\aleph_1)$; por ejemplo, que satisface "todo conjunto es contable" o "$\mathscr{P}(\omega)$ no existe"; ver [7, Lemma II.4.4].

Corolario 11.30. *Si ZFC es consistente, no puede probar la implicación*

$$\mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(ZFC + \textit{“existe un cardinal inaccesible”}).$$

Demostración. Sea I la afirmación "Existe un cardinal inaccesible". Por el Corolario 11.29, $ZFC + I$ prueba que existe un modelo de ZFC, es decir,

$$ZFC + I \text{ prueba } \mathrm{Con}(ZFC). \tag{14}$$

Si ZFC probara $\mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(ZFC + I)$, *a fortiori* tendríamos

$$ZFC + I \text{ prueba } \mathrm{Con}(ZFC) \to \mathrm{Con}(ZFC + I). \tag{15}$$

Luego, aplicando modus ponens a (14) y (15), concluimos

$$ZFC + I \text{ prueba } \mathrm{Con}(ZFC + I).$$

Pero esto contradice el Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. $\boxed{\perp\!\!\perp}$

Es decir, la existencia de un cardinal inaccesible **no es** relativamente consistente con ZFC. Como además $ZFC + I$ prueba $\mathrm{Con}(ZFC)$ decimos que la teoría $ZFC + I$ tiene mayor ***fuerza de consistencia*** que ZFC.

Agradecimientos Agradezco a Martín Moroni por los apuntes tomados durante 2016 y a Azul Fatalini por sus apuntes de 2019; a colegas de la UNSJ (en particular Belén Gimenez), y a los estudiantes de la UBA (especialmente a Emilio M. Martínez) por varias observaciones que permitieron mejorar la presente versión. Para redactar estas notas, me han sido de gran utilidad apuntes diseñados por el Prof. Diego Vaggione, especialmente en la parte de aritmética ordinal. También he consultado las notas de curso [1] del Prof. Roberto Cignoli, de las cuales utilicé la parte de modelos y algunos ejercicios. La Figura 2 fue contribuida por Emilio M. Martínez.

Bibliografía

[1] R. Cignoli, "Teoría axiomática de conjuntos: Una introducción", Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (2016).

[2] D. van Dalen, "Logic and Structure", Berlin: Springer (2004), cuarta edición.

[3] H. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, "Mathematical Logic", Springer New York (1996).

[4] T. Jech, "Set Theory. The Millennium Edition", Springer-Verlag (2002), tercera edición. Corrected fourth printing, 2006.

[5] W. Just, M. Weese, "Discovering Modern Set Theory. I", Grad. Studies in Mathematics **8**, American Mathematical Society (1996).

[6] K. Kunen, "The Foundations of Mathematics", College Publications (2009).

[7] K. Kunen, "Set Theory", College Publications (2011), segunda edición. Revised edition, 2013.

[8] J.R. Munkres, "Topology", Prentice Hall, Inc. (2000), segunda edición.

[9] J. Palumbo, Forcing and independence in set theory, Webpage (2009 — accessed August 2014). UCLA Logic Center Summer School for Undergraduates.

[10] B. Tsaban, What is 0^0, in ordinal exponentiation?, Mathematics Stack Exchange (2016). URL: `http://math.stackexchange.com/q/2057038` (version: 2016-12-13).

A. Ayudas para algunos ejercicios

Ayuda (x0.13). Ver que $\bigcap\mathscr{A}$ es igual a $\{x \in X : \forall U \in \mathscr{A}(x \in U)\}$ para cada X en $\mathscr{A}$.

Ayuda (x1.8). Considerar $\alpha \setminus \beta$.

Ayuda (x1.14). Dado un ordinal α_0, copiar la idea del Ejercicio x1.13.

En el Ejercicio x3.2(*b*), se pide decidir si hay una biyección entre $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 1\}$ y $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < \sqrt{2}\}$ que preserve el orden. Existe una, y de hecho vale este resultado mucho más general:

Teorema A.1 (Cantor)**.** *Todos los conjuntos contables, totalmente ordenados, densos y sin extremos son isomorfos.*

Este resultado se puede probar, dados dos órdenes **P** y **Q**, haciendo una construcción recursiva del isomorfismo, partiendo de dos enumeraciones de ellos [5, Theorem 16, p.50].

Ayuda (x4.3). Utilizando *AC* encontrar un selector apropiado y usarlo para definir f por recursión en ω.

Ayuda (x5.7). Probar las dos desigualdades.

Ayuda (x5.8). Partir el conjunto de índices en λ subconjuntos de tamaño λ.

Ayuda (x5.9). Copiar la prueba del Teorema de König.

Ayuda (x6.9). En general, cualquier espacio separable es ccc.

Ayuda (x7.10). Sea $C \subseteq \kappa$ club. Basta probar que el θ-ésimo elemento de C tiene cofinalidad θ.

Ayuda (x7.14). Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $\alpha < \omega_1$ límite hay $g(\alpha) < \alpha$ tal que f varía menos que ε en el intervalo $[g(\alpha), \alpha)$.

Ayuda (x10.5). Todos menos (c) y (d) son isomorfos a $\langle A, \in\rangle$ para algún A transitivo. Y (c) es el único que no es isomorfo a un subconjunto de un conjunto transitivo.

B. Ejercicios resueltos

Ejercicio (x1.11(*a*))**.** El producto ordinal distribuye a izquierda con la suma: $\alpha \cdot (\beta + \xi) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi$.

Solución. Recordar que $+$ es normal (comentario después del Corolario 1.34).

Lo probemos por inducción en ξ. Es decir, probamos el enunciado para α y β fijos.

$\boxed{\xi = 0}$ $\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + 0 = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$, usando la primera línea de la definición.

$\boxed{\xi + 1}$ Supongamos que vale para ξ. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + (\xi + 1)) &= \alpha \cdot ((\beta + \xi) + 1) && \text{asociatividad de } + \\
&= \alpha \cdot (\beta + \xi) + \alpha && \text{definición de } \cdot \\
&= \alpha \cdot \beta + \underline{\alpha \cdot \xi + \alpha} && \text{hipótesis inductiva} \\
&= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \cdot (\xi + 1) && \text{definición de } \cdot
\end{aligned}$$

$\boxed{\gamma \in \mathsf{Lim}}$ Supongamos que vale para todo $\xi < \gamma$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \alpha \cdot \sup\{\beta + \xi : \xi < \gamma\} && \text{definición de } + \\
&= \sup\{\alpha \cdot (\beta + \xi) : \xi < \gamma\} && \text{Proposición 1.32} \\
&= \sup\{\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\} && \text{hipótesis inductiva} \\
&= \alpha \cdot \beta + \sup\{\alpha \cdot \xi : \xi < \gamma\} && + \text{ es normal} \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma && \text{definición de } \cdot
\end{aligned}$$

⊥

Ejercicio (x1.11(*b*))**.** El producto ordinal es asociativo.

Solución. Fijos α y β, probaremos por inducción en ξ que

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \xi) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \xi.$$

$\boxed{\xi = 0}$ $\alpha \cdot (\beta \cdot 0) = \alpha \cdot 0 = 0 = (\alpha \cdot \beta) \cdot 0$, todo por la primera línea de la definición.

$\boxed{\xi + 1}$ Supongamos que vale para ξ. Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta \cdot (\xi + 1)) &= \alpha \cdot ((\beta \cdot \xi) + \beta) && \text{definición de } \cdot \\
&= \alpha \cdot (\beta \cdot \xi) + \alpha \cdot \beta && \text{Distributiva } \cdot, + \\
&= (\alpha \cdot \beta) \cdot \xi + \alpha \cdot \beta && \text{Hipótesis inductiva} \\
&= (\alpha \cdot \beta) \cdot (\xi + 1) && \text{definición de } \cdot
\end{aligned}$$

$\boxed{\gamma \in \mathsf{Lim}}$

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \alpha \cdot \sup\{\beta \cdot \delta : \delta < \gamma\} && \text{definición de } \cdot \\
&= \sup\{\alpha \cdot (\beta \cdot \delta) : \delta < \gamma\} && \text{Proposición 1.32} \\
&= \sup\{(\alpha \cdot \beta) \cdot \delta : \delta < \gamma\} && \text{Hipótesis inductiva} \\
&= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma && \text{definición de } \cdot
\end{aligned}$$

⊥

Ejercicio (Lema 5.5)**.** Si $\kappa \in \mathsf{Card}$ y $\alpha < \kappa$, entonces $\alpha + 1 < \kappa$.

Solución. Si α es un número natural, $\alpha + 1$ también lo es y por ende es menor que κ. Para el caso de que α sea infinito, basta encontrar una biyección entre α y $\alpha + 1$. Definimos entonces $f : \alpha + 1 \to \alpha$ de la siguiente manera:

$$f(\beta) := \begin{cases} \beta + 1 & \beta < \omega \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \\ 0 & \beta = \alpha \end{cases}$$

Es inmediato que f es 1-1 y sobre. ⊥

Ejercicio (Ejercicio 5.23)**.** Si θ es regular y $\kappa \in \mathsf{Card}$, $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} = \kappa^{<\theta}$.

Solución. Como $\theta > 1$, basta ver que $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} \leq \kappa^{<\theta}$.

Sea $X \in {}^{<\theta}({}^{<\theta}\kappa)$; esto es, $X = \{x^\beta\}_{\beta<\eta}$ con $\eta < \theta$, y para cada $\beta < \eta$, $x^\beta = \langle x^\beta_\alpha \rangle_{\alpha<\eta_\beta}$, con $\eta_\beta < \theta$ para cada $\beta < \eta$. Como θ es regular, $\lambda := \text{máx}(\eta, \sup\{\eta_\beta : \beta < \eta\})$ es menor que θ. Luego, podemos representar a X como un elemento de ${}^\lambda({}^\lambda(\kappa+1)) =_c {}^{\lambda\cdot\lambda}\kappa \subseteq {}^{<\theta}\kappa$, rellenando con el valor κ donde haga falta.

Más precisamente, definimos una aplicación $X \mapsto \{\bar{x}^\beta\}_{\beta<\lambda}$ donde, para cada $\alpha < \lambda$,

$$\bar{x}^\beta_\alpha := \begin{cases} x^\beta_\alpha & \beta < \eta \wedge \alpha < \eta_\beta \\ \kappa & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Se puede ver fácilmente que esta aplicación es 1-1 puesto que ${}^{<\theta}\kappa$ es la unión disjunta de los ${}^\delta\kappa$ con $\delta < \theta$, y para cada δ existe a lo sumo un λ tal que $\delta = \lambda \cdot \lambda$. Concluimos entonces que $(\kappa^{<\theta})^{<\theta} \leq \kappa^{<\theta}$. ⊥⊥

Ejercicio (Ejercicio 5.26)**.** Existen exactamente $2^{\aleph_0}$ subconjuntos Borel de $\mathbb{R}$.

Solución. Tomamos en el Lema 5.24 $\theta = \aleph_1$, $\kappa = 2^{\aleph_0}$, $B = \mathscr{P}(\mathbb{R})$, $S = \{(a,b) : a < b,\ a,b \in \mathbb{Q}\}$ y $\mathscr{F}$ que consista de dos operaciones: $x \mapsto \mathbb{R} \setminus x$ y $\langle x_n \rangle_{n\in\omega} \mapsto \bigcup\{x_n : n \in \omega\}$. Luego, aplicando el Lema 5.25,

$$\kappa^{<\theta} = (2^{\aleph_0})^{<\aleph_1} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$ ⊥⊥

Ejercicio (11.19)**.** Probar que la unión binaria $\cup$ es absoluta entre los modelos transitivos de Extensionalidad, Pares, Comprensión y Unión.

Solución. Con los tres últimos axiomas citados se puede probar la existencia y con Extensionalidad la unicidad de $\varnothing$, $\{x,y\}$ y de $x \cup y = \bigcup\{x,y\}$ para cada x e y. En particular, se puede probar $\forall x,y \exists! z \varphi_{\mathrm{u}}(x,y,z)$ donde

$$\varphi_{\mathrm{u}}(x,y,z) := \forall w\,(w \in z \leftrightarrow w \in x \vee w \in y).$$

define la unión binaria $z = x \cup y$. Esta fórmula es lógicamente equivalente a

$$\forall w \in z\,(w \in x \vee w \in y) \wedge \forall w \in x\,(w \in z) \wedge \forall w \in y\,(w \in z)$$

que es Δ_0. Luego $\varphi_{\mathrm{u}}(x,y,z)$ es absoluta entre M y V por el Lema 11.13 y se sigue el resultado. ⊥⊥

Índice alfabético