Teoremas de Löwenheim-Skolem

Teoría de Conjuntos

Danae Dutto
Becaria Doctoral del Logics Interaction and Intelligent Systems
Dir. Carlos Areces

05 de Julio de 2022

FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

¿De que voy a hablar?

Los teoremas de **Löwenheim-Skolem descendente y ascendente**.

Estos teoremas, llamados así por Leopold Löwenheim y Thoralf Skolem, hablan sobre la existencia y cardinalidad de modelos.

Intuitivamente, nos dicen que si una teoría numerable de primer orden tiene un modelo infinito, entonces para cada cardinal infinito κ tiene un modelo de tamaño κ.

Mas aún, nos dicen que ninguna teoría de primer orden con un modelo infinito puede tener un modelo único (bajo isomorfismo).

En otras palabras, las teorías de primer orden no pueden controlar la cardinalidad de sus modelos infinitos.

Formalización

Sea Γ un conjunto de sentencias de un lenguaje de primer orden de cardinalidad κ tal que Γ tiene un modelo de cardinalidad λ con $\kappa \leq \lambda$:

Teorema (Löwenheim-Skolem Descendente). Se cumple que Γ tiene un modelo de cardinalidad κ' para todo κ', $\kappa \leq \kappa' \leq \lambda$.

Teorema (Löwenheim-Skolem Ascendente). Se cumple que Γ tiene un modelo de cardinalidad κ' para todo κ', $\kappa' \geq \lambda$.

Preliminares

Definición (Signatura). Una signatura de primer orden es una tupla $\Sigma = \langle F, R, C \rangle$ donde:

- F, o func(Σ), es un conjunto de símbolos de función;
- R, o rel(Σ), es un conjunto de símbolos de relación;
- C, o const(Σ), es un conjunto de símbolos de constante.

La cardinalidad de Σ, escrito como $|\Sigma|$, es la cardinalidad de $F \cup R \cup C$.

Definición (Σ-lenguaje). Un Σ-lenguaje es un conjunto de fórmulas de primer orden cuyos símbolos no-lógicos se encuentran en Σ. En un Σ-lenguaje vamos a tener: términos, formulas, sentencias (dif. entre variable libre y ligada) ...

Observación. Un Σ-lenguaje construido sobre una signatura de cardinalidad κ tiene también cardinalidad κ.

Definición (Modelo). Sea Σ una signatura de primer orden; un modelo basado en Σ es una tupla $\mathcal{A}$ que contiene:

- un conjunto no vacío A de elementos (dominio/universo);
- una función $f^{\mathcal{A}}$ por cada $f \in \mathsf{func}(\Sigma)$, una relación $r^{\mathcal{A}}$ por cada $r \in \mathsf{rel}(\Sigma)$, y un elemento $c^{\mathcal{A}}$ por cada $c \in \mathsf{cons}(\Sigma)$.

El cardinal de $\mathcal{A}$, escrito $|\mathcal{A}|$, es el cardinal de A.

Definición (Satisfacibilidad). La relación $\vDash$ de satisfacibilidad de una fórmula φ en un modelo $\mathcal{A}$ bajo una asignación α, escrito $\mathcal{A} \vDash \varphi[\alpha]$, se define de la manera usual.

Usamos $\mathcal{A} \vDash \varphi$ sii $\mathcal{A} \vDash \varphi[\alpha]$ para toda asignación α.

Definición (Submodelo). Un submodelo $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$, escrito $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, es un modelo basado en Σ definido de la manera usual teniendo en cuenta inclusiones de dominios y restricciones de funciones y relaciones.

Definición (Submodelo Elemental). Si $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ y

$$\mathcal{B} \vDash \varphi[\alpha] \text{ sii } \mathcal{A} \vDash \varphi[\alpha]$$

para toda asignación α, y para toda Σ-fórmula φ, entonces, decimos que $\mathcal{B}$ es un submodelo elemental de $\mathcal{A}$, escrito $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$.

Lema (Criterio de Tarski). Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$; $\varphi(x_1, ..., x_k, x)$ una fórmula con variables libres x_1, ..., x_k, x; y $b_1, \ldots, b_k$ una secuencia de elementos del dominio de $\mathcal{B}$;

si

$\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[b_1, ..., b_k]$ implica
existe $b \in B$ tal que $\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$

entonces

$\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$.

Prueba (Criterio de Tarski)

Supongamos que:

(i) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$

(ii) $\mathcal{A} \models \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[b_1, ..., b_k]$ implica

existe $b \in B$ tal que $\mathcal{A} \models \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$

Tenemos que ver que: para toda Σ-fórmula ψ y para toda valuación α, se cumple que:

$$\mathcal{B} \models \psi[\alpha] \text{ sii } \mathcal{A} \models \psi[\alpha]$$

La demostración es por inducción en la estructura de ψ.

Prueba (Criterio de Tarski)

Caso: $\psi = \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))$

Tenemos que demostrar que

$$\mathcal{B} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[\alpha] \text{ sii } \mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[\alpha]$$

(solo si) Supongamos $\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[b_1, ..., b_k]$

por (ii) existe $b \in B$ tal que: $\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$.

por hipotesis inductiva, $\mathcal{B} \vDash \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$.

por la definicion de satisfacibilidad de $\exists$,

$$\mathcal{B} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[b_1, ..., b_k].$$

Prueba (Löwenheim-Skolem Descendente)

Supongamos que Γ tiene un modelo $\mathcal{A}$ de cardinalidad λ definido sobre una signatura Σ de cardinalidad κ

Tenemos que poder construir un modelo $\mathcal{B}$ para Γ tal que $|\mathcal{B}| = \kappa'$ para $\kappa \leq \kappa' \leq \lambda$.

Podemos obtener este resultado si podemos construir un modelo $\mathcal{B}$ que tenga las siguientes propiedades:

(i) $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$ y (ii) $|\mathcal{B}| = \kappa'$.

Prueba (Löwenheim-Skolem Descendente)

Consideremos un conjunto $B = \bigcup_{0 \leq i} B_i$ donde:

(i) $B_i \subseteq A$;

(ii) $B_i \subseteq B_{(i+1)}$;

(iii) $|B_i| = \kappa'$; y

(iv) para todo $\varphi(x_1, ..., x_k, x)$ y $b_1, ..., b_k \in B_i$
si $\mathcal{A} \vDash \exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x))[b_1, ..., b_k]$, entonces,
existe $b \in B_{(i+1)}$ tal que $\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$.

Prueba (Löwenheim-Skolem Descendente)

Se cumple que B satisface las siguientes propiedades:

(a) $B \subseteq A$

(b) $\{\mathsf{c}^{\mathcal{A}} \mid \mathsf{c} \in \mathsf{const}(\Sigma)\} \subseteq B$ y

(c) para toda $\mathsf{f} \in \mathsf{func}(\Sigma)$ y secuencia $b_1, ..., b_k$ de elementos en B se cumple que $\mathsf{f}^{\mathcal{A}}(b_1, ..., b_k) \in B$.

(d) $|B| = \kappa'$.

Las propiedades (a) – (d) nos permiten construir un submodelo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ con dominio B; de lo cual podemos concluir que $|\mathcal{B}| = \kappa'$.

Prueba (Löwenheim-Skolem Descendente)

Además B satisface que:

(e) $\mathcal{A} \vDash (\exists x(\varphi(x_1, ..., x_k, x)))[b_1, ..., b_k]$ implica
existe $b \in B$ tal que $\mathcal{A} \vDash \varphi(x_1, ..., x_k, x)[b_1, ..., b_k, b]$

Por el Lema (Criterio de Tarski), tenemos $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$.

Esto último establece el resultado del teorema de Löwenheim-Skolem descendente.

¿Para qué?

- Las demostraciones matemáticas son interesantes en si mismas.
- Las técnicas de demostración utilizadas en estos teoremas encuentran uso en demostraciones "parecidas".

pero además . . .

- Modelos no estandares de la aritmética.