Consistencia Relativa de Anti-Fundación

Matías Steinberg

13 de junio de 2022

Organización de la presentación

Preliminares

Axioma de Anti-Fundación

Universo Anti-Fundado

Preliminares

Cocientes de Clases

Decoradores de Grafos

Grafos Punteados

Bisimulación

Cocientes de Clases

Condición de Equivalencia

Una relación de clase binaria $\sim$ es una condición de equivalencia sobre una clase A si y solo si $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva sobre A.

Cocientes de Clases

Condición de Equivalencia
Una relación de clase binaria $\sim$ es una condición de equivalencia sobre una clase A si y solo si $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva sobre A.

Operación Determinante
Sea $\sim$ una condición de equivalencia sobre una clase arbitraria A y sea F una función de clase unaria. Luego, F es una operación determinante para $\sim$ si y solo si, para todo par $x, y \in A$, $x \sim y \leftrightarrow F(x) = F(y)$.

Cocientes de Clases

Condición de Equivalencia
Una relación de clase binaria $\sim$ es una condición de equivalencia sobre una clase A si y solo si $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva sobre A.

Operación Determinante
Sea $\sim$ una condición de equivalencia sobre una clase arbitraria A y sea F una función de clase unaria. Luego, F es una operación determinante para $\sim$ si y solo si, para todo par $x, y \in A$, $x \sim y \leftrightarrow F(x) = F(y)$.

Lema de Scott
Sea $A \subseteq$ WF una clase y sea $\sim$ una condición de equivalencia sobre A. Sean:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} \colon \exists z \in R(\alpha)(z \sim x)\} \\ F(x) &= \{z \in R(\rho(x)) \colon z \sim x\} \end{aligned}$$

Luego, F es una operación determinante para $\sim$.

Clase Cociente
Sea $\sim$ una condición de equivalencia sobre A y sea F una operación determinante para $\sim$.

Luego, se define a la clase cociente de A por $\sim$ determinada por F como

$$(A/\sim)_F = F[A]$$

Cocientes de Clases

Clase Cociente
Sea $\sim$ una condición de equivalencia sobre A y sea F una operación determinante para $\sim$.

Luego, se define a la clase cociente de A por $\sim$ determinada por F como

$$(A/{\sim})_F = F[A]$$

Se utilizará esta técnica para construir el universo anti-fundado.

Decoradores de Grafos

Suryección de Mostowski
Sea $\mathbf{G} = (G, \to)$ un grafo dirigido y sea d una función (conjunto) con dominio G. Luego, d es un decorador (o una suryección de Mostowski) de $\mathbf{G}$ si y solo si

$$\forall x \in G(d(x) = \{d(y) \colon y \leftarrow x\}) = d[x{\downarrow}_{\mathbf{G}}]$$

Suryección de Mostowski
Sea $\mathbf{G} = (G, \to)$ un grafo dirigido y sea d una función (conjunto) con dominio G. Luego, d es un decorador (o una suryección de Mostowski) de $\mathbf{G}$ si y solo si

$$\forall x \in G(d(x) = \{d(y) : y \leftarrow x\}) = d[x{\downarrow}_{\mathbf{G}}]$$

Grafos Bien Fundados
Un grafo $\mathbf{G}$ es bien fundado si y solo si

$$\forall X \subseteq G(X \neq \emptyset \to \exists m \in X \forall x \in X(x \not\leftarrow^{\mathbf{G}} m))$$

Colapso de Mostowski

Colapso de Mostowski

(1) Para todo grafo $\mathbf{G}$ bien fundado, existe un único decorador $d_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$. Más aún, $d_{\mathbf{G}}[G]$ es un conjunto transitivo bien fundado.

Colapso de Mostowski

(1) Para todo grafo $\mathbf{G}$ bien fundado, existe un único decorador $d_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$. Más aún, $d_{\mathbf{G}}[G]$ es un conjunto transitivo bien fundado.

(2) Sea A un conjunto. Luego, A es bien fundado si y solo si existe un grafo $\mathbf{G}$ bien fundado y existe un nodo $x \in G$ tal que $A = d_{\mathbf{G}}(x)$.

Colapso de Mostowski

(1) Para todo grafo $\mathbf{G}$ bien fundado, existe un único decorador $d_{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$. Más aún, $d_{\mathbf{G}}[G]$ es un conjunto transitivo bien fundado.

(2) Sea A un conjunto. Luego, A es bien fundado si y solo si existe un grafo $\mathbf{G}$ bien fundado y existe un nodo $x \in G$ tal que $A = d_{\mathbf{G}}(x)$.

Motivación
Los conjuntos bien fundados se corresponden a grafos bien fundados. ¿Se corresponderán entonces los conjuntos mal fundados a grafos mal fundados?

Grafos Punteados

Grafo Punteado
Sea $\mathbf{G}$ un grafo dirigido y sea $p \in G$. Luego, $(\mathbf{G}, p)$ será considerado un grafo punteado.

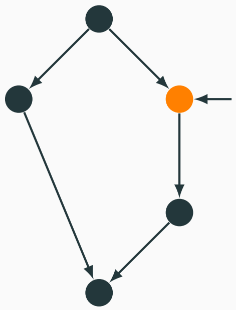
Grafos Punteados

Grafo Punteado
Sea $\mathbf{G}$ un grafo dirigido y sea $p \in G$. Luego, $(\mathbf{G}, p)$ será considerado un grafo punteado.

Ejemplos

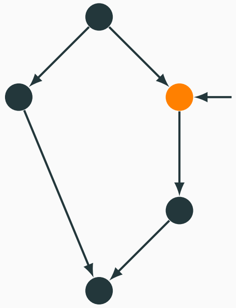
Grafo Punteado
Sea $\mathbf{G}$ un grafo dirigido y sea $p \in G$. Luego, $(\mathbf{G}, p)$ será considerado un grafo punteado.

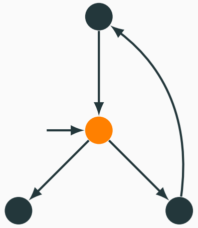
Ejemplos



Grafo Punteado
Sea $\mathbf{G}$ un grafo dirigido y sea $p \in G$. Luego, $(\mathbf{G}, p)$ será considerado un grafo punteado.

Ejemplos

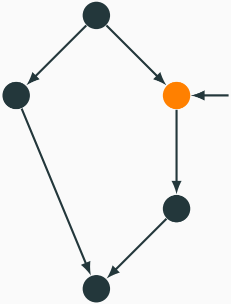


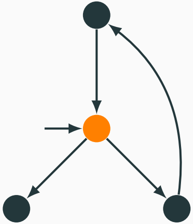


Grafos Punteados

Grafo Punteado
Sea $\mathbf{G}$ un grafo dirigido y sea $p \in G$. Luego, $(\mathbf{G}, p)$ será considerado un grafo punteado.

Ejemplos

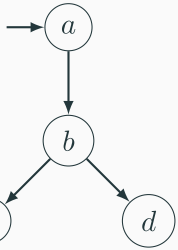


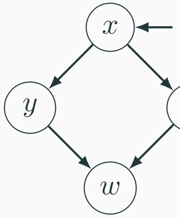


Ni el punto seleccionado ni el grafo necesitan cumplir propiedades adicionales.

Bisimulación

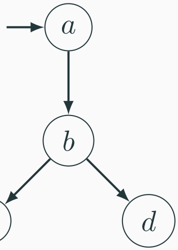
Ejemplo

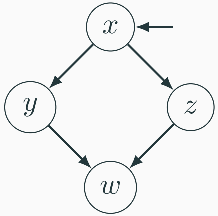




Bisimulación

Ejemplo





Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

Ejemplo

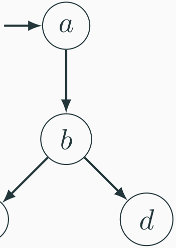
Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

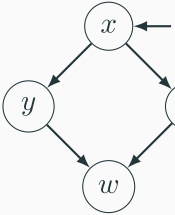
$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

¿Qué propiedad tienen en común $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$?

Bisimulación

Ejemplo





Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

¿Qué propiedad tienen en común $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$? $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son bisimilares.

Ejemplo

Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

¿Qué propiedad tienen en común $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$? $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son bisimilares.

Ejemplo

Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

¿Qué propiedad tienen en común $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$? $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son bisimilares.

Ejemplo

Sea $\mathbf{G}$ el grafo de la izquierda y sea $\mathbf{H}$ el grafo de la derecha. Notar que

$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{\{\emptyset\}\} = d_{\mathbf{H}}(x)$$

¿Qué propiedad tienen en común $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$? $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son bisimilares.

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

Bisimulación

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \; R \; p^{\mathbf{H}}$

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \ R \ p^{\mathbf{H}}$

(2) Para todos $x \in G$, $y \in H$, si $x \ R \ y$, entonces:

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \; R \; p^{\mathbf{H}}$

(2) Para todos $x \in G$, $y \in H$, si $x \; R \; y$, entonces:

  (I) Para todo $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$, existe $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$ tal que $u \; R \; v$.

Bisimulación

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \ R \ p^{\mathbf{H}}$

(2) Para todos $x \in G$, $y \in H$, si $x \ R \ y$, entonces:

  (I) Para todo $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$, existe $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$ tal que $u \ R \ v$.

  (II) Para todo $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$, existe $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$ tal que $u \ R \ v$.

Bisimulación

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \; R \; p^{\mathbf{H}}$

(2) Para todos $x \in G$, $y \in H$, si $x \; R \; y$, entonces:

  (I) Para todo $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$, existe $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$ tal que $u \; R \; v$.

  (II) Para todo $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$, existe $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$ tal que $u \; R \; v$.

Intuitivamente, una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ explicita una forma en la que $\mathbf{H}$ puede realizar los comportamientos de $\mathbf{G}$ y viceversa.

Bisimulación
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos punteados, y sea $R \subseteq G \times H$. Luego, R es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ si y solo si:

(1) $p^{\mathbf{G}} \; R \; p^{\mathbf{H}}$

(2) Para todos $x \in G$, $y \in H$, si $x \; R \; y$, entonces:

  (I) Para todo $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$, existe $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$ tal que $u \; R \; v$.

  (II) Para todo $v \leftarrow^{\mathbf{H}} y$, existe $u \leftarrow^{\mathbf{G}} x$ tal que $u \; R \; v$.

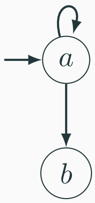
Intuitivamente, una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ explicita una forma en la que $\mathbf{H}$ puede realizar los comportamientos de $\mathbf{G}$ y viceversa.

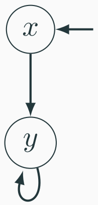
Si existe una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$, se dirá que $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ son bisimilares, y se denotará $\mathbf{G} \sim \mathbf{H}$.

Bisimulación

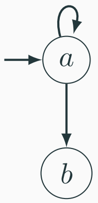
Ejemplo
El mismo de antes:

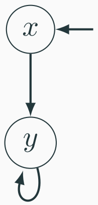
Ejemplo





Ejemplo





Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación.

Bisimulación

Ejemplo

Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \; R \; x$.

Ejemplo

Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \; R \; x$.

Bisimulación

Ejemplo

Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \; R \; x$. Como $b \leftarrow a$, debe existir $z \leftarrow x$ tal que $b \; R \; z$. Además, la única flecha que sale de x tiene a y como destino. Entonces, $b \; R \; y$.

Bisimulación

Ejemplo

Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \; R \; x$. Como $b \leftarrow a$, debe existir $z \leftarrow x$ tal que $b \; R \; z$. Además, la única flecha que sale de x tiene a y como destino. Entonces, $b \; R \; y$.

Bisimulación

Ejemplo

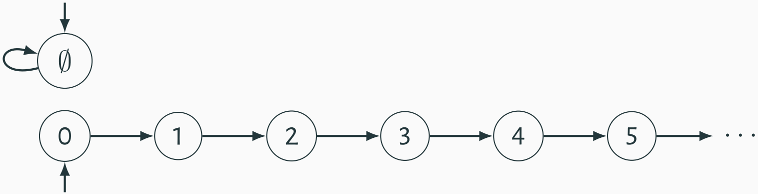
Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \ R \ x$. Como $b \leftarrow a$, debe existir $z \leftarrow x$ tal que $b \ R \ z$. Además, la única flecha que sale de x tiene a y como destino. Entonces, $b \ R \ y$. Finalmente, como $y \leftarrow y$, debe existir $z \leftarrow b$ tal que $z \ R \ y$.

Ejemplo

Suponer por el absurdo que son bisimilares, y sea R una bisimulación. Luego, $a \ R \ x$. Como $b \leftarrow a$, debe existir $z \leftarrow x$ tal que $b \ R \ z$. Además, la única flecha que sale de x tiene a y como destino. Entonces, $b \ R \ y$. Finalmente, como $y \leftarrow y$, debe existir $z \leftarrow b$ tal que $z \ R \ y$. Pero no hay ninguna flecha que tenga como origen a b. $\lightning$

Ejemplo
Sean

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} &= (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \\
\mathbf{H}_n &= (\omega, \{(n, n+1) \colon n \in \omega\}, n)
\end{aligned}
$$

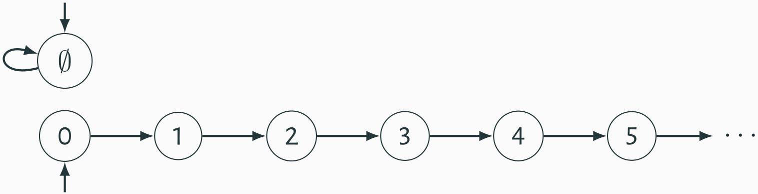


Bisimulación

Ejemplo

Sean

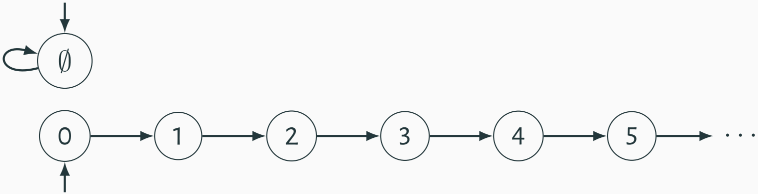
$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \\ \mathbf{H}_n &= (\omega, \{(n, n+1) : n \in \omega\}, n) \end{aligned}$$



$\{\emptyset\} \times \omega$ es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_0$.

Ejemplo
Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= (\{\emptyset\}, \{(\emptyset, \emptyset)\}, \emptyset) \\ \mathbf{H}_n &= (\omega, \{(n, n+1) \colon n \in \omega\}, n) \end{aligned}$$



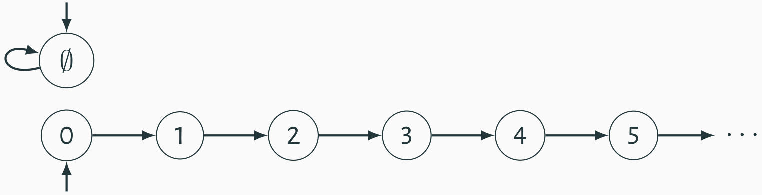
$\{\emptyset\} \times \omega$ es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_0$. Más aún, para cada $n \in \omega$, $\{\emptyset\} \times \omega$ es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_n$.

Bisimulación

Ejemplo

Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= (\{\emptyset\}, \{(\emptyset,\emptyset)\}, \emptyset)\\ \mathbf{H}_n &= (\omega, \{(n, n+1) \colon n \in \omega\}, n)\end{aligned}$$



$\{\emptyset\} \times \omega$ es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_0$. Más aún, para cada $n \in \omega$, $\{\emptyset\} \times \omega$ es una bisimulación entre $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}_n$. Finalmente, para cada $n \in \omega$, $\mathbf{G} \sim \mathbf{H}_n$.

Propiedades de la Bisimulación

Propiedades de la Bisimulación

(1) $\sim$ es una condición de equivalencia sobre la clase de todos los grafos punteados.

Bisimulación

Propiedades de la Bisimulación

(1) $\sim$ es una condición de equivalencia sobre la clase de todos los grafos punteados.

(2) Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos bien fundados. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Bisimulación

Propiedades de la Bisimulación

(1) $\sim$ es una condición de equivalencia sobre la clase de todos los grafos punteados.

(2) Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos bien fundados. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Motivación

Bisimulación

Propiedades de la Bisimulación

(1) $\sim$ es una condición de equivalencia sobre la clase de todos los grafos punteados.

(2) Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos bien fundados. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Motivación

La primera propiedad se utilizará para definir el universo anti-fundado.

Bisimulación

Propiedades de la Bisimulación

(1) $\sim$ es una condición de equivalencia sobre la clase de todos los grafos punteados.

(2) Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos bien fundados. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Motivación

La primera propiedad se utilizará para definir el universo anti-fundado.

Sobre la segunda propiedad, ¿se la podrá extender a grafos mal fundados?

Axioma de Anti-Fundación

Axioma de Anti-Fundación

Colapso de Mostowski Revisitado

Invarianza por Bisimulación Revisitada

Axioma de Anti-Fundación

El axioma de anti-fundación no establece simplemente la existencia de algunos conjuntos mal fundados, sino que va un paso más allá, estableciendo la existencia de conjuntos mal fundados de cualquier forma y, más aún, todos los conjuntos (bien fundados y mal fundados) quedan unívocamente determinados por su forma.

Axioma de Anti-Fundación

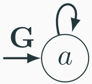
El axioma de anti-fundación no establece simplemente la existencia de algunos conjuntos mal fundados, sino que va un paso más allá, estableciendo la existencia de conjuntos mal fundados de cualquier forma y, más aún, todos los conjuntos (bien fundados y mal fundados) quedan unívocamente determinados por su forma.

Axioma de Anti-Fundación
Todo grafo $\mathbf{G}$ admite un único decorador $d_{\mathbf{G}}$.

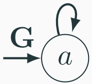
Axioma de Anti-Fundación

Ejemplos

Ejemplos



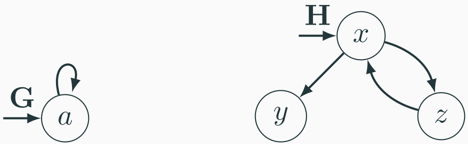
Ejemplos



$$d_{\mathbf{G}}(a) \quad = \quad \{d_{\mathbf{G}}(a)\}$$

Axioma de Anti-Fundación

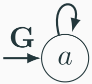
Ejemplos

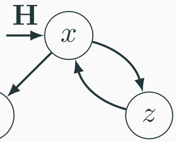


$$d_{\mathbf{G}}(a) \quad = \quad \{d_{\mathbf{G}}(a)\}$$

Axioma de Anti-Fundación

Ejemplos



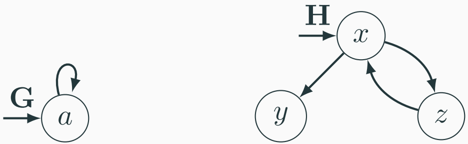


$$d_{\mathbf{G}}(a) = \{d_{\mathbf{G}}(a)\}$$

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{H}}(x) &= \{d_{\mathbf{H}}(y), d_{\mathbf{H}}(z)\} \\ d_{\mathbf{H}}(y) &= \emptyset \\ d_{\mathbf{H}}(z) &= \{d_{\mathbf{H}}(x)\} \end{aligned}$$

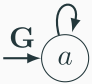
Axioma de Anti-Fundación

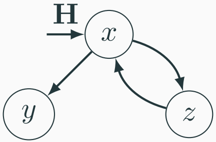
Ejemplos



$$
\begin{aligned}
d_{\mathbf{G}}(a) &= \{d_{\mathbf{G}}(a)\} \\
\\
d_{\mathbf{H}}(x) &= \{\emptyset, d_{\mathbf{H}}(z)\} \\
d_{\mathbf{H}}(y) &= \emptyset \\
d_{\mathbf{H}}(z) &= \{d_{\mathbf{H}}(x)\}
\end{aligned}
$$

Ejemplos





$$\Omega = \{\Omega\}$$

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{\emptyset, \Omega_2\}\\ \Omega_2 &= \{\Omega_1\}\end{aligned}$$

Axioma de Anti-Fundación

Proposición
Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Proposición
Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Demostración para Ω

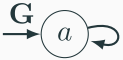
Proposición
Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Demostración para Ω

Axioma de Anti-Fundación

Proposición
Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Demostración para Ω



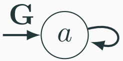
Sean X e Y conjuntos tales que $X = \{X\}$ y $Y = \{Y\}$. Sean $f, g \colon \{a\} \to V$ definidas como $f(a) = X$ y $g(a) = Y$.

Axioma de Anti-Fundación

Proposición

Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Demostración para Ω



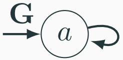
Sean X e Y conjuntos tales que $X = \{X\}$ y $Y = \{Y\}$. Sean $f, g\colon \{a\} \to V$ definidas como $f(a) = X$ y $g(a) = Y$. Notar que

$$\begin{aligned} f(a) &= \{f(a)\} &= \{f(x) \colon x \leftarrow a\} \\ g(a) &= \{g(a)\} &= \{g(x) \colon x \leftarrow a\} \end{aligned}$$

Proposición

Los conjuntos Ω, Ω_1 y Ω_2 son únicos.

Demostración para Ω



Sean X e Y conjuntos tales que $X = \{X\}$ y $Y = \{Y\}$. Sean $f, g\colon \{a\} \to V$ definidas como $f(a) = X$ y $g(a) = Y$. Notar que

$$
\begin{aligned}
f(a) &= \{f(a)\} &= \{f(x)\colon x \leftarrow a\} \\
g(a) &= \{g(a)\} &= \{g(x)\colon x \leftarrow a\}
\end{aligned}
$$

Luego, f y g son ambas decoradores de $\mathbf{G}$. Finalmente, por el axioma de anti-fundación, $f = g$. Equivalentemente, $f(a) = g(a)$. Por lo tanto, $X = Y$.

Colapso de Mostowski Generalizado*

Colapso de Mostowski Revisitado

Colapso de Mostowski Generalizado*

(1) Para todo grafo $\mathbf{G}$ mal fundado, $d_{\mathbf{G}}[G]$ es un conjunto transitivo mal fundado.

Colapso de Mostowski Generalizado*

(1) Para todo grafo $\mathbf{G}$ mal fundado, $d_{\mathbf{G}}[G]$ es un conjunto transitivo mal fundado.

(2) Sea A un conjunto. Luego, A es mal fundado si y solo si existe un grafo $\mathbf{G}$ y existe un nodo $x \in G$ tal que $A = d_{\mathbf{G}}(x)$ y $\mathbf{H} = (x{\downarrow}^*_{\mathbf{G}}, \rightarrow^{\mathbf{G}} \restriction x{\downarrow}^*_{\mathbf{G}})$ es mal fundado.

Invarianza por Bisimulación Revisitada

Teorema (Aczel)
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Invarianza por Bisimulación Revisitada

Teorema (Aczel)
Sean $\mathbf{G}$ y $\mathbf{H}$ dos grafos. Luego, para todo $p \in G$ y para todo $q \in H$,

$$d_{\mathbf{G}}(p) = d_{\mathbf{H}}(q) \leftrightarrow (\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, q)$$

Motivación
Este resultado es el pilar para construir el universo anti-fundado de Aczel, ya que dos *conjuntos* serán iguales si y solo si los grafos que los definen son bisimilares.

Universo Anti-Fundado

Universos de Conjuntos

Universos de Rieger

Universo de Aczel

Consistencia Relativa de Anti-Fundación

Universos de Conjuntos

Universo de Conjuntos
Un universo de conjuntos es un par $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ donde M es una clase no vacía y E es una relación de clase binaria tal que:

Universo de Conjuntos
Un universo de conjuntos es un par $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ donde M es una clase no vacía y E es una relación de clase binaria tal que:

(1) $\forall x \forall y (E(x, y) \to x \in M \land y \in M)$.

Universo de Conjuntos
Un universo de conjuntos es un par $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ donde M es una clase no vacía y E es una relación de clase binaria tal que:

(1) $\forall x \forall y (E(x, y) \to x \in M \wedge y \in M)$.

(2) Para todo $x \in M$, $\{t \colon t \; E \; x\}$ es un conjunto.

Universo de Conjuntos

Un universo de conjuntos es un par $\mathcal{M} = \langle M, E \rangle$ donde M es una clase no vacía y E es una relación de clase binaria tal que:

(1) $\forall x \forall y (E(x, y) \to x \in M \wedge y \in M)$.

(2) Para todo $x \in M$, $\{t \colon t \; E \; x\}$ es un conjunto.

Notación

$$\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = \{t \colon t \; E \; x\}$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$(x = y)^{\mathcal{M}} \quad = \quad (x = y)$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$\begin{aligned} (x = y)^{\mathcal{M}} &= (x = y) \\ (x \in y)^{\mathcal{M}} &= E(x, y) \end{aligned}$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$\begin{aligned} (x = y)^{\mathcal{M}} &= (x = y) \\ (x \in y)^{\mathcal{M}} &= E(x, y) \iff x \in \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(y) \end{aligned}$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$\begin{array}{rcl} (x = y)^{\mathcal{M}} & = & (x = y) \\ (x \in y)^{\mathcal{M}} & = & E(x, y) \iff x \in \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(y) \\ (\neg\varphi)^{\mathcal{M}} & = & \neg\varphi^{\mathcal{M}} \end{array}$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
(x = y)^{\mathcal{M}} & = & (x = y) \\
(x \in y)^{\mathcal{M}} & = & E(x, y) \iff x \in \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(y) \\
(\neg\varphi)^{\mathcal{M}} & = & \neg\varphi^{\mathcal{M}} \\
(\varphi \,\square\, \psi)^{\mathcal{M}} & = & \varphi^{\mathcal{M}} \,\square\, \psi^{\mathcal{M}}
\end{array}$$

Interpretación de Fórmulas
Dado un universo de conjuntos $\mathcal{M}$, se define la interpretación (o relativización) de las fórmulas del lenguaje $\{\in\}$ en $\mathcal{M}$ como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
(x = y)^{\mathcal{M}} & = & (x = y) \\
(x \in y)^{\mathcal{M}} & = & E(x, y) \iff x \in \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(y) \\
(\neg\varphi)^{\mathcal{M}} & = & \neg\varphi^{\mathcal{M}} \\
(\varphi \,\square\, \psi)^{\mathcal{M}} & = & \varphi^{\mathcal{M}} \,\square\, \psi^{\mathcal{M}} \\
(Qx\varphi)^{\mathcal{M}} & = & Qx \in M \varphi^{\mathcal{M}}
\end{array}
$$

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M(\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M (\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Universos de Rieger

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists ! x \in M (\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Propiedades Básicas

Universos de Rieger

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M (\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Propiedades Básicas

(1) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M (x = \rho(Y) \leftrightarrow \mathbf{b}(x) = Y)$.

Universos de Rieger

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M (\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Propiedades Básicas

(1) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M (x = \rho(Y) \leftrightarrow \mathbf{b}(x) = Y)$.

(2) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M (x \; E \; \rho(Y) \leftrightarrow x \in Y)$.

Universos de Rieger

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M(\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Propiedades Básicas

(1) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M(x = \rho(Y) \leftrightarrow \mathbf{b}(x) = Y)$.

(2) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M(x \; E \; \rho(Y) \leftrightarrow x \in Y)$.

(3) $\forall x \in M(\rho(\mathbf{b}(x)) = x)$.

Universo de Rieger
Un universo de conjuntos $\mathcal{M}$ es un universo de Rieger si y solo si

$$\forall Y \subseteq M \exists! x \in M (\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y)$$

Notación
Dado $Y \subseteq M$, $\rho(Y)$ denotará al único $x \in M$ tal que $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) = Y$.

Propiedades Básicas

(1) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M (x = \rho(Y) \leftrightarrow \mathbf{b}(x) = Y)$.

(2) $\forall x \in M \forall Y \subseteq M (x \; E \; \rho(Y) \leftrightarrow x \in Y)$.

(3) $\forall x \in M (\rho(\mathbf{b}(x)) = x)$.

(4) $\forall Y \subseteq M (\mathbf{b}(\rho(Y)) = Y)$.

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad

(2) Pares

Universos de Rieger

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad

(2) Pares

(3) Unión

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad

(2) Pares

(3) Unión

(4) Partes

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad
(2) Pares
(3) Unión
(4) Partes
(5) Separación

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface:

(1) Extensionalidad
(2) Pares
(3) Unión
(4) Partes
(5) Separación
(6) Reemplazo

Lema

Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

(1) $\rho(\emptyset)$ es el conjunto vacío en $\mathcal{M}$.

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

(1) $\rho(\emptyset)$ es el conjunto vacío en $\mathcal{M}$.

(2) Si $x \in M$, entonces $\rho(\{x\})$ es el singulete de x en $\mathcal{M}$.

Universos de Rieger

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

(1) $\rho(\emptyset)$ es el conjunto vacío en $\mathcal{M}$.

(2) Si $x \in M$, entonces $\rho(\{x\})$ es el singulete de x en $\mathcal{M}$.

(3) Si $x, y \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cup \mathbf{b}(y))$ es la unión de x e y en $\mathcal{M}$.

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

(1) $\rho(\emptyset)$ es el conjunto vacío en $\mathcal{M}$.

(2) Si $x \in M$, entonces $\rho(\{x\})$ es el singulete de x en $\mathcal{M}$.

(3) Si $x, y \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cup \mathbf{b}(y))$ es la unión de x e y en $\mathcal{M}$.

(4) Si $x \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cup \{x\})$ es el sucesor de x en $\mathcal{M}$.

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego:

(1) $\rho(\emptyset)$ es el conjunto vacío en $\mathcal{M}$.

(2) Si $x \in M$, entonces $\rho(\{x\})$ es el singulete de x en $\mathcal{M}$.

(3) Si $x, y \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cup \mathbf{b}(y))$ es la unión de x e y en $\mathcal{M}$.

(4) Si $x \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cup \{x\})$ es el sucesor de x en $\mathcal{M}$.

(5) Si $x, y \in M$, entonces $\rho(\mathbf{b}(x) \cap \mathbf{b}(y))$ es la intersección de x e y en $\mathcal{M}$.

Uso de interpretaciones de términos

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$.

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$. En primer lugar, se tiene que

$$x = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$$

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$. En primer lugar, se tiene que

$$x = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$$

Luego,

$$\emptyset \in I \leftrightarrow \exists x(\forall z(z \notin x) \wedge x \in I)$$

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$. En primer lugar, se tiene que

$$x = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$$

Luego,

$$\emptyset \in I \leftrightarrow \exists x(\forall z(z \notin x) \land x \in I)$$

Entonces,

$$(\emptyset \in I)^{\mathcal{M}} = \exists x \in M(\forall z \in M(z \not{E} x) \land x \; E \; I)$$

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$. En primer lugar, se tiene que

$$x = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$$

Luego,

$$\emptyset \in I \leftrightarrow \exists x(\forall z(z \notin x) \wedge x \in I)$$

Entonces,

$$(\emptyset \in I)^{\mathcal{M}} = \exists x \in M(\forall z \in M(z \not{E}\ x) \wedge x\ E\ I)$$

Por el lema anterior,

$$\forall z \in M(z \not{E}\ \rho(\emptyset))$$

Uso de interpretaciones de términos

Suponer que se desea interpretar en $\mathcal{M}$ la fórmula $\emptyset \in I$. En primer lugar, se tiene que

$$x = \emptyset \leftrightarrow \forall z(z \notin x)$$

Luego,

$$\emptyset \in I \leftrightarrow \exists x(\forall z(z \notin x) \wedge x \in I)$$

Entonces,

$$(\emptyset \in I)^{\mathcal{M}} = \exists x \in M(\forall z \in M(z \not{E}\ x) \wedge x\ E\ I)$$

Por el lema anterior,

$$\forall z \in M(z \not{E}\ \rho(\emptyset))$$

Finalmente,

$$(\emptyset \in I)^{\mathcal{M}} \leftrightarrow \rho(\emptyset)\ E\ I \quad \text{(Extensionalidad es crucial)}$$

Aplicando el mismo truco a las interpretaciones del sucesor y de la intersección en $\mathcal{M}$, se tiene:

Aplicando el mismo truco a las interpretaciones del sucesor y de la intersección en $\mathcal{M}$, se tiene:

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface Infinito y Elección.

Aplicando el mismo truco a las interpretaciones del sucesor y de la intersección en $\mathcal{M}$, se tiene:

Lema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface Infinito y Elección.

Teorema
Sea $\mathcal{M}$ un universo de Rieger. Luego, $\mathcal{M}$ satisface ZFC^-.

Base del Universo

Universo de Aczel

Base del Universo

Sea

$$\mathcal{A}_0 = \{(G, \to, p) \colon G \in \mathsf{WF} \wedge \to \subseteq G \times G \wedge p \in G\}$$

la clase de todos los grafos con carrier bien fundado.

Universo de Aczel

Base del Universo

Sea

$$\mathcal{A}_0 = \{(G, \to, p) \colon G \in \mathsf{WF} \wedge \to \subseteq G \times G \wedge p \in G\}$$

la clase de todos los grafos con carrier bien fundado.

Sea ε_0 la relación de clase binaria definida sobre $\mathcal{A}_0$ tal que, para todos $(\mathbf{G}, p), (\mathbf{H}, q) \in \mathcal{A}_0$,

$$(\mathbf{G}, p) \; \varepsilon_0 \; (\mathbf{H}, q) \leftrightarrow \exists v \leftarrow^{\mathbf{H}} q((\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, v))$$

Base del Universo

Sea

$$\mathcal{A}_0 = \{(G, \to, p) \colon G \in \mathsf{WF} \wedge \to \subseteq G \times G \wedge p \in G\}$$

la clase de todos los grafos con carrier bien fundado.

Sea ε_0 la relación de clase binaria definida sobre $\mathcal{A}_0$ tal que, para todos $(\mathbf{G}, p), (\mathbf{H}, q) \in \mathcal{A}_0$,

$$(\mathbf{G}, p) \ \varepsilon_0 \ (\mathbf{H}, q) \leftrightarrow \exists v \xleftarrow{\mathbf{H}} q((\mathbf{G}, p) \sim (\mathbf{H}, v))$$

Propiedad de Congruencia

Sean $(\mathbf{G}_1, p_1) \sim (\mathbf{G}_2, p_2)$ y $(\mathbf{H}_1, q_1) \sim (\mathbf{H}_2, q_2)$. Luego,

$$(\mathbf{G}_1, p_1) \ \varepsilon_0 \ (\mathbf{H}_1, q_1) \leftrightarrow (\mathbf{G}_2, p_2) \ \varepsilon_0 \ (\mathbf{H}_2, q_2)$$

Universo de Aczel

Universo de Aczel

Como $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathrm{WF}$ y $\sim$ es una condición de equivalencia sobre $\mathcal{A}_0$, existe, por Scott, una operación α determinante para $\sim$.

Universo de Aczel

Como $\mathcal{A}_0 \subseteq$ WF y $\sim$ es una condición de equivalencia sobre $\mathcal{A}_0$, existe, por Scott, una operación α determinante para $\sim$.

Sea entonces $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0/{\sim})_\alpha$, y sea ε la relación de clase binaria sobre $\mathcal{A}$ definida como, para todos $x, y \in \mathcal{A}$,

$$x \ \varepsilon \ y \leftrightarrow \exists \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{A}_0 (x = \alpha(\mathbf{G}) \wedge y = \alpha(\mathbf{H}) \wedge \mathbf{G} \ \varepsilon_0 \ \mathbf{H})$$

Universo de Aczel

Como $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathrm{WF}$ y $\sim$ es una condición de equivalencia sobre $\mathcal{A}_0$, existe, por Scott, una operación α determinante para $\sim$.

Sea entonces $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0/{\sim})_\alpha$, y sea ε la relación de clase binaria sobre $\mathcal{A}$ definida como, para todos $x, y \in \mathcal{A}$,

$$x \;\varepsilon\; y \leftrightarrow \exists \mathbf{G}, \mathbf{H} \in \mathcal{A}_0 (x = \alpha(\mathbf{G}) \wedge y = \alpha(\mathbf{H}) \wedge \mathbf{G} \;\varepsilon_0\; \mathbf{H})$$

La relación ε está bien definida por la propiedad de congruencia.

Caracterización del Cuerpo

Para todo $(\mathbf{G}, p) \in \mathcal{A}_0$, se tiene que

$$\mathbf{b}(\alpha(\mathbf{G}, p)) = \{\alpha(\mathbf{G}, v) \colon v \leftarrow^{\mathbf{G}} p\}$$

Universo de Aczel

Caracterización del Cuerpo
Para todo $(\mathbf{G}, p) \in \mathcal{A}_0$, se tiene que

$$\mathbf{b}(\alpha(\mathbf{G}, p)) = \{\alpha(\mathbf{G}, v) \colon v \leftarrow^{\mathbf{G}} p\}$$

Corolario
Para todo $x \in \mathcal{A}$, $\mathbf{b}(x)$ es un conjunto. Luego, $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ es un universo de conjuntos.

Consistencia Relativa de Anti-Fundación

Teorema (Aczel)

Teorema (Aczel)

(1) $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ es un universo de Rieger. Luego, $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ satisface ZFC^-.

Consistencia Relativa de Anti-Fundación

Teorema (Aczel)

(1) $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ es un universo de Rieger. Luego, $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ satisface ZFC^-.

(2) $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ satisface el axioma de anti-fundación.

Consistencia Relativa de Anti-Fundación

Teorema (Aczel)

(1) $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ es un universo de Rieger. Luego, $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ satisface ZFC^-.

(2) $\langle \mathcal{A}, \varepsilon \rangle$ satisface el axioma de anti-fundación.

Corolario

$$\mathrm{Con}(ZFC^-) \to \mathrm{Con}(ZFC^- + AFA)$$