Teoría de Conjuntos

Pedro Sánchez Terraf*

9 de junio de 2022

1. Guía de Clases

1. Introducción. Contexto histórico: creciente abstracción en Matemática. G. Cantor y conjuntos excepcionales de series trigonométricas. Conjunto derivado E' e interación. Necesidad de enumerar proceso transfinito. Ordinales como tipos de isomorfismo de órdenes (ejemplo $\omega + 1$ incrustado en $\mathbb{R}$). Paradoja de Burali-Forti. Paradoja de Russell. Restricción a Comprensión y Paradoja de Berry. Razonamientos matemáticos $=$ ZFC $+$ Lógica de primer orden.

2. Predicados, Clases, relaciones de clase, funciones de clase. Par de Wiener-Kuratowski, productos cartesianos (en $ZF^- - P$), Relaciones de orden parcial (estrictas y laxas), bien fundadas, totales. Buen orden (estricto). Ejemplos: $\mathbb{R}^{\geq 0}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3. Conjuntos transitivos. Ordinales. Ord está bien ordenada por $\in$; es clase propia (Burali-Forti). Ordinales sucesores, límites, números naturales. La *clase* ω. Axioma de Infinito.

4. Inducción ordinaria en ω. Existencia de ${}^{n}B$ y ${}^{<\omega}B$. Definiciones por recursión sobre ω.

5. Isomorfismo entre estructuras "binarias". Propiedades de isomorfismos: preservan segmentos iniciales, restricciones son isos sobre la imagen. Isomorfismos de conjuntos de ordinales en ordinales. Rigidez de los ordinales. Todo buen orden es isomorfo a un ordinal.

6. Tipos de isomorfismo de buenos órdenes son monótonos (respecto de la inclusión). Orden lexicográfico, producto ordinal y la suma ordinal de órdenes totales. Principio de Inducción Transfinita y enunciado de Recursión Transfinita. Definición recursiva de la suma ordinal; es estrictamente creciente en el segundo argumento (por inducción).

7. Preservación de supremos límite implica preservación de supremos generales. La suma es asociativa (por Inducción). Funciones normales

   Comparación de conjuntos vía inyeccciones. Cardinales. Conjuntos bien ordenables, inclusiones y proyecciones son bien ordenables. Enunciado del Teorema de Cantor, Schröder y Bernstein. Teorema de Hartogs. Álefs.

8. Aritmética Cardinal. Teorema de Hessenberg.

   Equivalencias de AC. Existencia de selectores, Principio de buen orden AC^+, Lema de Zorn y Principio Maximal de Hausdorff.

9. Cardinal de uniones acotadas $|\mathcal{F}| \leq \kappa \wedge \forall A \in \mathcal{F}\, (|A| \leq \kappa) \implies |\bigcup \mathcal{F}| \leq \kappa$. Validez con desigualdades estrictas. Cofinalidad. Lema de Factorización. Ejemplo de formalización en Isabelle/ZF.

*Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación. Centro de Investigación y Estudios de Matemática (CIEM-FaMAF). Córdoba. Argentina.

10. Versión mejorada del Lema de Factorización. Lema de idempotencia. Ordinales regulares. La cofinalidad es un cardinal regular. Caracterización en términos acotación estricta de uniones. Teorema de König. Cardinales inaccesibles.

11. Características (invariantes) cardinales del Continuo. Dominación de funciones. Familias casi disjuntas (maximales). Cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{a}$. Teorema de Solomon $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{a}$. Cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$ y discusión del Teorema de Malliaris-Shelah.

12. Nociones de forzamiento. Ejemplo $\mathrm{Fn}(I, J)$: funciones y filtros. Conjuntos densos, filtros $\mathcal{D}$-genéricos. Teorema del Filtro Genérico ($MA(\aleph_0)$). No hay genérico para $\mathrm{Fn}(\omega, \omega_1)$.

    Anticadenas; condición de cadenas contables (ccc). Axioma de Martin $MA(\kappa)$; MA implica que $\mathfrak{b} = 2^{\aleph_0}$.

13. Definición de filtro e ideal sobre X como casos particulares de filtros en $\langle \mathcal{P}(X) \setminus \{0\}, \subseteq \rangle$ resp. $\langle \mathcal{P}(X) \setminus \{X\}, \supseteq \rangle$. Dual de un filtro. Ultrafiltros. Los ultrafiltros son filtros maximales. Filtros λ-completos. Filtro de Fréchet, ideal $\mathcal{N}ull$.

    Conjuntos club. Intersección de $< \kappa$ clubs es club. El filtro $\mathrm{Club}(\kappa)$. Conjuntos estacionarios. Ejemplos de clubs y de conjuntos estacionarios: S^κ_θ. Presentación de la intersección diagonal mediante la clausura bajo una operación unaria.

14. El filtro club es cerrado por intersecciones diagonales de tamaño κ. Lema de “compresión” de Fodor. Cardinales de Mahlo.

    Problema de la Medida para cardinales. Medidas λ-aditivas. Cardinales medibles a valores reales (mvr). El primer cardinal que admite una medida no trivial es mvr. Los cardinales mvr son regulares. Átomos de una medida. Enunciado del Teorema de Ulam.

15. Si el primer cardinal mvr admite medida sin átomos, entonces $2^{\aleph_0}$ también. Los cardinales mvr son límites. Átomos y medidas a dos valores. Cardinales medibles. Relación con ultrafiltros. Los cardinales medibles son inaccesibles.

16. Relaciones (de clase) bien fundadas y conjuntistas. Enunciado del Lema ($*$). Clausura transitiva y relaciones de clase conjuntistas. Inducción sobre relaciones bien fundadas. Teorema de Recursión bien fundada: aproximaciones a la solución recursiva.

17. Rango de una relación bien fundada. Conjuntos bien fundados WF. Jerarquía acumulativa o del rango bien fundado $R(\alpha) = V_\alpha$. Familia $H(\kappa)$ de los conjuntos de cardinal $< \kappa$ hereditariamente. $H(\kappa)$ es subconjunto de $R(\kappa)$.

18. Necesidad de matematizar la noción de “propiedad” de una estructura matemática. Ejemplo: “independencia” de la conmutatividad del producto en grupos. Modelos de primer orden, fórmulas de primer orden, relación de satisfacción.

    Obstrucciones con ZFC: Segundo Teorema de Incompletitud de Gödel. Satisfacción de axiomas de ZFC por un modelo. Modelos estándares y transitivos.

19. Relativización de fórmulas y relación con satisfacción por modelos estándares. Algunas propiedades de la relación de demostrabilidad $\vdash$. Pruebas finitarias de consistencia relativa.

    Las clases transitivas satisfacen Extensionalidad. Las fórmulas Δ_0 son absolutas entre modelos transitivos.

20. Validez de axiomas en clases (Fundación, Separación, Reemplazo).

    Relativización y absolutez de relaciones y funciones de clase. Absolutez de par, unión (S/P) y sucesor. Validez de Infinito.

21. Relativización y absolutez de relaciones y funciones de clase, continuado. Absolutez de fórmulas Δ_0 sobre lenguajes generales.

    Validez de Pares y Unión. WF es modelo de clase de ZFC. Fórmulas Π_1, Σ_1 y Δ_1; absolutez de estas últimas para modelos transitivos. Absolutez de funciones Π_1 con unicidad en el modelo.

22. $H(\kappa)$ es modelo de $ZFC - P$ para κ regular incontable; $H(\aleph_1)$ satisface "$\mathcal{P}(\omega)$ no existe" y "todo conjunto es contable". Las nociones de ordinal, cardinal, regularidad y ser límite en sentido fuerte son absolutas para clases transitivas cerradas por $\mathcal{P}$.

    Si κ es inaccesible, $H(\kappa)$ satisface ZFC. Consistencia relativa de ZFC + "no existen cardinales inaccesibles".

23. Teorema de Compacidad a partir de Completitud y construcción de modelos mal fundados de ZFC. Colapso de Mostowski.

    Ultraproductos. Algebrización de la equivalencia lógica mediante el Teorema de Keisler-Shelah. Teorema de Łoś. La "diagonal" es una incrustación elemental en la ultrapotencia.

24. Truco de Scott. Ultrapotencias del universo. La incrustación elemental $j : V \to V^I/\mathcal{U}$. Buena fundación requiere ultrafiltro σ-completo.

    Ultrapotencia $V^\kappa/\mathcal{U}$ con κ medible y $\mathcal{U}$ κ-completo. Los ordinales menores que κ son preservados por la incrustación elemental $\operatorname{mos} \circ j : V \to V^\kappa/\mathcal{U} \to M$. El punto crítico de $\operatorname{mos} \circ j$ es κ.