

# Introducción a los Algoritmos

## Axiomas y Teoremas del Cálculo

### Axiomas del cálculo proposicional

**A1** Asociatividad equivalencia:

$$((P \equiv Q) \equiv R) \equiv (P \equiv (Q \equiv R))$$

**A2** Conmutatividad equivalencia:

$$P \equiv Q \equiv Q \equiv P$$

**A3** Neutro equivalencia:

$$P \equiv \text{True} \equiv P$$

**A4** Definición de Negación:

$$\neg(P \equiv Q) \equiv \neg P \equiv Q$$

**A5** Definición de False:

$$\text{False} \equiv \neg \text{True}$$

**A6** Definición de discrepancia:

$$P \neq Q \equiv \neg(P \equiv Q)$$

**A7** Asociatividad disyunción:

$$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

**A8** Conmutatividad disyunción:

$$P \vee Q \equiv Q \vee P$$

**A9** Idempotencia disyunción:

$$P \vee P \equiv P$$

**A10** Distributividad disyunción con equivalencia:

$$P \vee (Q \equiv R) \equiv (P \vee Q) \equiv (P \vee R)$$

**A11** Tercero excluido:

$$P \vee \neg P$$

**A12** Regla dorada:

$$P \wedge Q \equiv P \equiv Q \equiv P \vee Q$$

**A13** Definición de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$

**A14** Definición de consecuencia:

$$P \Leftarrow Q \equiv P \vee Q \equiv P$$

### Teoremas Básicos

**T1** Metateorema de True:

*Si P está demostrado,  $P \equiv \text{True}$*

**T2** Doble negación:

$$\neg\neg P \equiv P$$

**T3** Equivalencia y negación:

$$P \equiv \text{False} \equiv \neg P$$

**T4** Elemento absorbente de la disyunción:

$$P \vee \text{True} \equiv \text{True}$$

**T5** Elemento neutro de la disyunción:

$$P \vee \text{False} \equiv P$$

**T6** Teorema (\*):

$$P \vee Q \equiv P \vee \neg Q \equiv P$$

**T7** Negación de una implicación:

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$$

### Teoremas No Tan Básicos

**T8** Caracterización de implicación:

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

**T9** De Morgan para la disyunción:

$$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

**T10** De Morgan para la conjunción:

$$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

**T11** Distributividad de la disyunción con la conjunción:

$$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

**T12** Distributividad de la conjunción con la disyunción:

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

**T13** Asociatividad de la conjunción:

$$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$$

**T14** Idempotencia de la conjunción:

$$P \wedge P \equiv P$$

**T15** Neutro de la conjunción:

$$P \wedge \text{True} \equiv P$$

**T16** Elemento absorbente de la conjunción:

$$P \wedge \text{False} \equiv \text{False}$$

## Teoremas con Implicación

**T17** Modus ponens:

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

**T18** Modus ponens con  $\equiv$ :

$$P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$$

**T19** Modus tollens:

$$(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \Rightarrow \neg P$$

**T20** Currificación:

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q \Rightarrow R)$$

**T21** Transitividad de  $\Rightarrow$ :

$$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

**T22** Debilitamiento para  $\wedge$ :

$$P \wedge Q \Rightarrow P$$

**T23** Debilitamiento para  $\vee$ :

$$P \Rightarrow P \vee Q$$

**T24** Definición dual de  $\Rightarrow$ :

$$P \Rightarrow Q \equiv P \wedge Q \equiv P$$

## Axiomas del Cálculo de Predicados

**A15** Rango True:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x : \text{True} : f.x \rangle$$

**A16** Intercambio entre rango y término:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: r.x \Rightarrow f.x \rangle$$

**A17** Regla de término:

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \wedge \langle \forall x :: g.x \rangle \equiv \langle \forall x :: f.x \wedge g.x \rangle$$

**A18** Distributividad de  $\vee$  con  $\forall$  (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$X \vee \langle \forall x :: f.x \rangle \equiv \langle \forall x :: X \vee f.x \rangle$$

**A19** Rango unitario (si  $\forall X$  y  $\exists X$  no ocurren en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x : x = X : f.x \rangle \equiv f.X$$

**A20** Anidado:

$$\langle \forall x, y :: f.x.y \rangle \equiv \langle \forall x :: \langle \forall y :: f.x.y \rangle \rangle$$

**A21** Definición de  $\exists$ :

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \neg \langle \forall x : r.x : \neg f.x \rangle$$

**A22** Axioma de Rango Vacío:

$$\langle \forall x : \text{False} : f.x \rangle \equiv \text{True}$$

## Teoremas Básicos

**T25** Término constante (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$\langle \forall x :: X \rangle \equiv X$$

**T26** Partición de rango:

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \wedge \langle \forall x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T27** Instanciación (si  $Y$  no ocurre en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x :: f.x \rangle \Rightarrow f.Y$$

**T28** Cambio de variable (si  $x$  no ocurre en  $f.y$  ni  $y$  en  $f.x$ ):

$$\langle \forall x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \forall y : r.y : f.y \rangle$$

**T29** Intercambio entre rango y término (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: r.x \wedge f.x \rangle$$

**T30** Regla del término:

$$\langle \exists x :: f.x \rangle \vee \langle \exists x :: g.x \rangle \equiv \langle \exists x :: f.x \vee g.x \rangle$$

**T31** Distributividad de  $\wedge$  con  $\exists$  (si  $x$  no ocurre en  $X$ ):

$$X \wedge \langle \exists x :: f.x \rangle \equiv \langle \exists x :: X \wedge f.x \rangle$$

**T32** Partición de rango:

$$\langle \exists x : r.x : f.x \rangle \vee \langle \exists x : s.x : f.x \rangle \equiv \langle \exists x : r.x \vee s.x : f.x \rangle$$

**T33** Testigo (si  $Y$  no ocurre en  $T.x$ ):

$$T.Y \Rightarrow \langle \exists x :: T.x \rangle$$

**T34** Intercambio entre rango y término:

$$\langle \exists x : R.x : T.x \rangle \equiv \langle \exists x :: R.x \wedge T.x \rangle$$