Introducción a los Algoritmos
Cálculo Proposicional

Pedro Sánchez Terraf

CIEM-FaMAF — Universidad Nacional de Córdoba

FaMAF
UNC
15 de abril de 2015

Contenido

Repaso (I)

Justificación

$$
\begin{aligned}
& 5 * (x + 3) = 20 \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa + } \} \\
& 5 * (3 + x) = 20
\end{aligned}
$$

Repaso (I)

$$
\begin{aligned}
& 5 * (x + 3) = 20 \\
\equiv \{ & \text{ Conmutativa + } \} \\
& 5 * (3 + x) = 20
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutativa de +:

$$a + b = b + a$$

Sustituyo a por x
Sustituyo b por 3
para obtener

$$x + 3 = 3 + x.$$

$$
\begin{aligned}
& \underline{S.(1+1)} = S.1 + S.1 \\
\equiv \{ \; & \text{Definición de } S \; \} \\
& 1+1+1 = S.1 + S.1
\end{aligned}
$$

Justificación

Definición de S

$$S.x \doteq x+1$$

Sustituyo x por

para obtener

$$S.(1+1) = 1+1+1$$

- Debo justificar usando propiedades **válidas** o **definiciones**.

Repaso (II)

$$
\begin{aligned}
& \underline{S.(1+1)} = S.1 + S.1 \\
\equiv \{ \; & \text{Definición de } S \; \} \\
& 1+1+1 = S.1 + S.1
\end{aligned}
$$

Justificación

Definición de S

$$S.x \doteq x + 1$$

Sustituyo x por $1+1$ para obtener

$$S.(1+1) = 1+1+1$$

- Debo justificar usando propiedades **válidas** o **definiciones**.

Cálculo Proposicional (I)

Justificaremos ahora usando expresiones booleanas válidas. Un ejemplo es la *Conmutatividad de* $\equiv$.

$$
\begin{aligned}
& r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q \equiv r \equiv r
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

Cálculo Proposicional (I)

Justificaremos ahora usando expresiones booleanas válidas. Un ejemplo es la *Conmutatividad de* $\equiv$.

$$
\begin{aligned}
& r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q \equiv r \equiv r
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por $p \wedge q$; obtengo

$$(r \equiv p \wedge q) \equiv (p \wedge q \equiv r).$$

Universidad Nacional de Córdoba UNC 1613 - 2013 400 AÑOS

Otra expresión booleana válida es la *Definición* $\Rightarrow$.

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (P \vee Q \equiv Q)$$

$$
\begin{aligned}
& q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \\
\equiv \; & \{ \text{ Definición } \Rightarrow \} \\
& q \equiv r \vee q \equiv q \equiv r
\end{aligned}
$$

Otra expresión booleana válida es la *Definición* $\Rightarrow$.

$$
\begin{aligned}
& q \equiv r \Rightarrow q \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Definición } \Rightarrow \} \\
& q \equiv r \vee q \equiv q \equiv r
\end{aligned}
$$

Justificación

Definición $\Rightarrow$:

$$(P \Rightarrow Q) \equiv (P \vee Q \equiv Q)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por q; obtengo

$$(r \Rightarrow q) \equiv (r \vee q \equiv q).$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Asociando con $\equiv$

Puedo **agrupar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera, poniendo paréntesis.

Ejemplo

Para la *Conmutatividad de* $\equiv$, tenemos

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$
$$P \equiv (Q \equiv Q \equiv P)$$
$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$
$$\ldots$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Asociando con $\equiv$

Puedo **agrupar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera, poniendo paréntesis.

Ejemplo

Para la *Conmutatividad de* $\equiv$, tenemos

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$
$$P \equiv (Q \equiv Q \equiv P)$$
$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$
$$\dots$$

Asociando y Conmutando con $\equiv$

Hasta ahora todo es igual. Pero las demostraciones con fórmulas proposicionales (las expresiones booleanas hechas con $\equiv$, $\wedge$, $\vee$,... y variables de tipo $Bool$) permiten mucha más flexibilidad.

Conmutando con $\equiv$

Puedo **ordenar** las expresiones separadas por $\equiv$ de la manera que quiera (y luego agrupar a placer).

Ejemplo

Para la *Definición de* $\Rightarrow$, tenemos

$$P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q \equiv Q$$
$$P \vee Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv Q$$
$$Q \equiv P \Rightarrow Q \equiv P \vee Q$$
$$\ldots$$

$$
\begin{array}{ll}
 & r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
 & p \wedge q \equiv r \equiv r \\
\equiv & \{ \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
 & p \wedge q
\end{array}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q) \equiv (Q \equiv P)$$

Sustituyo P por r
Sustituyo Q por $p \wedge q$; obtengo

$$(r \equiv p \wedge q) \equiv (p \wedge q \equiv r).$$

Cálculo Proposicional (III)

$$
\begin{aligned}
& r \equiv p \wedge q \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q \equiv r \equiv r \\
\equiv \{ & \text{ Conmutatividad } \equiv \} \\
& p \wedge q
\end{aligned}
$$

Justificación

Conmutatividad de $\equiv$:

$$(P \equiv Q \equiv Q) \equiv P$$

Sustituyo P por $p \wedge q$
Sustituyo Q por r ; obtengo

$$(p \wedge q \equiv r \equiv r) \equiv (p \wedge q).$$

Tareas para ahora mismo

1. Leer los axiomas, poniendoles paréntesis de acuerdo a la precedencia.
2. ¿De cuántas maneras se puede leer la *Definición de* $\neg$? (es el axioma **A4**).