Introducción a los Algoritmos

Cuantificador Universal (el “Para Todo”)

Pedro Sánchez Terraf

Enunciamos sin prueba el siguiente teorema:

Teorema 1 (Cambio de variable)**.** Si las variables i y j no son capturadas por ningún cuantificador de la expresión T, entonces

$$\big\langle \forall i \ : \ : \ T.i \big\rangle \equiv \big\langle \forall j \ : \ : \ T.j \big\rangle.$$

Para probar el próximo teorema necesitaremos un nuevo axioma.

A1 (Leibnitz para la Igualdad)**.** $x = y \Rightarrow (T.x \equiv T.y)$

Observación 1. Notar que la versión de este axioma para fórmulas proposicionales,

$$(p \equiv q) \Rightarrow (T.p \equiv T.q),$$

se puede demostrar usando cálculo proposicional, pero es bastante complicado.

Ejercicio 1. Demostrar la siguiente propiedad: $x = y \Rightarrow T.x \equiv x = y \Rightarrow T.y$.

Con estos elementos podemos demostrar:

Teorema 2 (Reenumeración)**.** Supongamos que i es una variable de tipo *Int*. Entonces

$$\big\langle \forall i \ : \ : \ T.(i+1) \big\rangle \equiv \big\langle \forall i \ : \ : \ T.i \big\rangle.$$

Demostración. Vamos a empezar eligiendo una variable j distinta a todas la que aparezcan en T para poder aplicar el teorema de *Cambio de Variable.*

$\quad \underline{\big\langle \forall i \ : \ : \ T.(i+1) \big\rangle}$

$\equiv \{$ Cambio de Variable $\}$

$\quad \big\langle \forall j \ : \ : \ \underline{T.(j+1)} \big\rangle$

$\equiv \{$ Rango unitario $\}$

$\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\equiv \{$ Intercambio entre Rango y Término $\}$

$\quad \big\langle \forall j \ : \ : \ \big\langle \forall i \ : \ : \ \underline{i = j+1 \Rightarrow T.i} \big\rangle \big\rangle$

$\equiv \{$ Ejercicio 1 $\}$

$\quad \underline{\big\langle \forall j \ : \ : \ \big\langle \forall i \ : \ : \ i = j+1 \Rightarrow T.(j+1) \big\rangle \big\rangle}$

$\equiv \{ \qquad \}$

$\quad \big\langle \forall i \ : \ : \ \underline{\big\langle \forall j \ : \ : \ i = j+1 \Rightarrow T.(j+1) \big\rangle} \big\rangle$

$\equiv \{$ Intercambio entre Rango y Término $\}$

$\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$

$\equiv \{$ Aritmética $\}$

$\quad \big\langle \forall i \ : \ : \ \big\langle \forall j \ : \ j = i-1 \ : \ T.(j+1) \big\rangle \big\rangle$

$\equiv \{ \qquad \}$

$\quad \big\langle \forall i \ : \ : \ \underline{T.((i-1)+1)} \big\rangle$

$\equiv \{$ Aritmética $\}$

$\quad \big\langle \forall i \ : \ : \ T.i \big\rangle$

$\square$

Ejercicio 2. ¿Funciona esta prueba si cambiamos “$i + 1$” por “$i + 2$”? ¿Y si ponemos “$i * 2$”?