

Introducción a los Algoritmos

Expresiones Cuantificadas

Pedro Sánchez Terraf

En lógica clásica, los *silogismos* eran una forma muy importante de razonamiento.

Todo mamífero es vertebrado.

Algunos mamíferos tienen cuatro patas.

Algunos vertebrados tienen cuatro patas.

Este razonamiento se puede escribir semiformalmente de la siguiente manera:

$P_1 : \langle \forall x : m.x : v.x \rangle.$

$P_2 : \langle \exists x : m.x : p.x \rangle.$

$C : \langle \exists x : v.x : p.x \rangle.$

Y es correcto si $P_1 \wedge P_2 \Rightarrow C$, igual que los razonamientos proposicionales. Para decidir si razonamientos de esta forma son correctos (y para otros ejercicios), el siguiente resultado puede ser de utilidad.

Teorema 1. Si $P \wedge Q \Rightarrow R$ es un teorema, entonces

$$\langle \forall i :: P \rangle \wedge \langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle.$$

Demostración. Nuestra estrategia va a ser trabajar sólo con \exists , de manera que usando proposicional nos vamos a sacar el “para todo” de $\langle \forall i :: P \rangle$ de encima.

$$\begin{aligned} & \langle \forall i :: P \rangle \wedge \langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle \\ \equiv & \{ \langle \forall i :: P \rangle \Rightarrow (\langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle) \} \\ \equiv & \{ \neg \langle \forall i :: P \rangle \vee (\langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle) \} \\ \equiv & \{ \langle \exists i :: \neg P \rangle \vee (\langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle) \} \end{aligned}$$

En este punto ya tenemos una expresión sólo con \exists ; como éste es compatible con la disyunción, hacemos aparecer algunas (y desaparecer \Rightarrow).

$$\begin{aligned} & \langle \exists i :: \neg P \rangle \vee (\langle \exists i :: Q \rangle \Rightarrow \langle \exists i :: R \rangle) \\ \equiv & \{ \langle \exists i :: \neg P \rangle \vee (\langle \exists i :: Q \rangle \vee \langle \exists i :: R \rangle \equiv \langle \exists i :: R \rangle) \} \\ \equiv & \{ \text{Distr. } \vee, \equiv \} \\ & \langle \exists i :: \neg P \rangle \vee \langle \exists i :: Q \rangle \vee \langle \exists i :: R \rangle \equiv \langle \exists i :: \neg P \rangle \vee \langle \exists i :: R \rangle \\ \equiv & \{ \langle \exists i :: \neg P \vee Q \vee R \rangle \equiv \langle \exists i :: \neg P \vee R \rangle. \} \end{aligned}$$

Lo mejor que podría pasarnos ahora es que $\neg P \vee Q \vee R \equiv \neg P \vee R$ sea un teorema. Esto es cierto, pero lo dejamos como un ejercicio a continuación. \square

Ejercicio 1. Demostrar que si $P \wedge Q \Rightarrow R$ es un teorema, entonces

$$\neg P \vee Q \vee R \equiv \neg P \vee R$$

también lo es.