

Introducción a la Lógica y la Computación

Mariana Badano Héctor Gramaglia
Pedro Sánchez Terraf Mauricio Tellechea
Guido Ivetta César Vallero

FaMAF, 3 de septiembre de 2021

- Las clases prácticas tienen una nueva dinámica de trabajo.
- Se asientan los temas del teórico inmediato anterior.

¡Participen!

- 1 Repaso
 - Representación de posets
 - Álgebras de Boole

- 2 Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas
 - Átomos y resultados básicos
 - Atomicidad y Separación
 - Prueba del Teorema

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\downarrow = \{x \in P : x \leq d\}$$

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d \downarrow = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos decrecientes.}$$

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d \downarrow = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos **decrecientes**.$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d \downarrow = c \downarrow \implies d = c$

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d \downarrow = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos **decrecientes** .}$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d \downarrow = c \downarrow \implies d = c$ **porque tiene inversa, sup.**

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\downarrow = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos **decrecientes** .}$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d\downarrow = c\downarrow \implies d = c$ porque tiene inversa, sup.
- F preserva orden: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Repaso: Representación de posets

Sea (P, \leq) un poset, y sea $F : P \rightarrow \mathcal{P}(P)$ definida por

$$F(d) := d\downarrow = \{x \in P : x \leq d\} \quad \text{ciertos **decrecientes** .}$$

- F es inyectiva: para todos $d, c \in P$, $d\downarrow = c\downarrow \implies d = c$ porque tiene inversa, sup.
- F preserva orden: para todos $d, c \in P$, $d \leq c \iff d\downarrow \subseteq c\downarrow$.

Teorema

- (P, \leq) es isomorfo a un subposet de $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$.
- $F : P \rightarrow F(P)$ es un isomorfismo entre P y su imagen.

Repaso: Álgebras de Boole

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \rightarrow B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \quad a \wedge \neg a = 0.$$

Repaso: Álgebras de Boole

Un **álgebra de Boole** $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es una estructura donde $(B, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo distributivo acotado y $\neg : B \rightarrow B$ da un complemento:

$$a \vee \neg a = 1 \quad a \wedge \neg a = 0.$$

Ejemplo

Álgebra de partes $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, A)$, para cualquier conjunto A .

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Lema

- Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Lema

- Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.
- Si $a, a_1, \dots, a_n \in At(B)$, entonces
 $a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) =$

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Lema

- Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.
- Si $a, a_1, \dots, a_n \in At(B)$, entonces
$$a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n)$$

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Lema

- Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.
- Si $a, a_1, \dots, a_n \in At(B)$, entonces $a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n) = 0$ ó existe j tal que $a = a_j$.

Teorema de Representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Para toda álgebra de Boole finita B existe A tal que B es isomorfa a $\mathcal{P}(A)$.

El conjunto A será exactamente el de los átomos de B :

Definición

$a \in B$ es un **átomo** si a cubre a 0 . $At(B)$ es el conjunto de los átomos de B .

Lema

- Si $a, b \in At(B)$, $a \wedge b = 0$ ó $a = b = a \wedge b$.
- Si $a, a_1, \dots, a_n \in At(B)$, entonces $a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n) = 0$ ó existe j tal que $a = a_j$.
- Para todos $x, y \in B$, $x \leq y \iff x \wedge \neg y = 0$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

- Es biyectiva.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

- Es biyectiva. Tiene **inversa** $\text{sup} : \mathcal{P}(At(B)) \rightarrow B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

- Es biyectiva. Tiene **inversa** $\text{sup} : \mathcal{P}(At(B)) \rightarrow B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
 - (\Rightarrow) la transitividad de \leq ;

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

- Es biyectiva. Tiene **inversa** $\text{sup} : \mathcal{P}(At(B)) \rightarrow B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
 - (\Rightarrow) la transitividad de \leq ;
 - $(\Leftarrow) X \subseteq Y \implies \text{sup} X \leq \text{sup} Y$.

Teorema de representación de álgebras de Boole finitas

Teorema

Sea $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ un álgebra de Boole finita. Luego

$$F : B \rightarrow \mathcal{P}(At(B))$$
$$x \mapsto \{a \in At(B) : a \leq x\}$$

es un isomorfismo entre $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ y $(\mathcal{P}(At(B)), \cup, \cap, (\cdot)^c, \emptyset, B)$.

Para probarlo, necesitamos ver que F :

- Es biyectiva. Tiene **inversa** $\text{sup} : \mathcal{P}(At(B)) \rightarrow B$. A continuación.
- Preserva el orden $c \leq b \iff F(c) \subseteq F(b)$. Sale directo de:
 - (\Rightarrow) la transitividad de \leq ;
 - $(\Leftarrow) X \subseteq Y \implies \text{sup} X \leq \text{sup} Y$.

Nos enfocamos en el caso $|B| \geq 2$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b \downarrow \setminus \{0\}$ de B .

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b\downarrow \setminus \{0\}$ de B .

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b\downarrow \setminus \{0\}$ de B .

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

Hay suficiente cantidad de átomos

Lema (Álgebras de Boole finitas son atómicas)

Para todo $b \in B$ distinto de 0 existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq b$.

Demostración.

Basta encontrar un minimal del subposet finito $b\downarrow \setminus \{0\}$ de B .

Lema (Separación)

Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Demostración.

Porque $x \wedge \neg y \neq 0$ y hay un átomo debajo.

Pasamos entonces a la prueba principal, la correspondencia entre conjuntos de átomos y elementos de B .

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in \text{At}(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in \text{At}(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
 x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
 x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que **implica**
 $x \leq y$ por Separación.

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que
 $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
 x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:

F y sup son inversas

Separación Para todo $x, y \in B$ tales que $x \not\leq y$ existe $a \in At(B)$ tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. $F(x) \subseteq F(y)$ implica $x \leq y$.

Recordemos: $F(x) := \{a \in At(B) : a \leq x\}$.

Prueba del Teorema de Representación.

Vemos que F y sup son inversas una de la otra.

- $x = \sup F(x) = \sup\{a \in At(B) : a \leq x\}$ para todo $x \in B$:
 x es claramente cota de $F(x)$. Y si y es cota, $F(x) \subseteq F(y)$, lo que implica $x \leq y$ por Separación.
- $A = F(\sup A) = \{a \in At(B) : a \leq \sup A\}$ para todo $A \subseteq At(B)$:
 $A \subseteq F(\sup A)$ sale directo. Y $F(\sup A) \subseteq A$ por **distributividad**.